



Festkörperelektronik

Nils Weimann

EIT / BHE

26.06.2025



Winzige Pendel

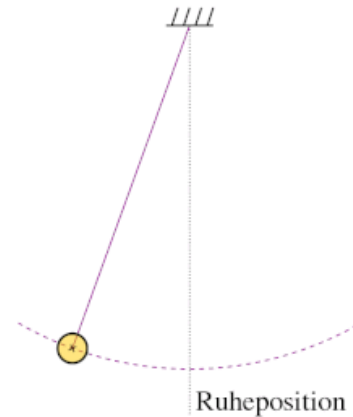
Nils Weimann

26.06.2025



Pendel

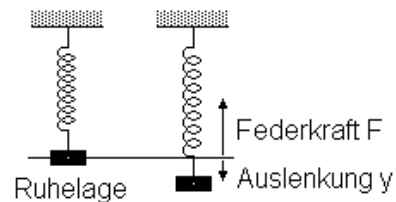
- Schwingendes System
- „punktförmige“ Masse m
- Pendellänge ℓ
- Gravitation g
→ potentielle Energie
- Bewegung, Geschwindigkeit v
→ kinetische Energie
- Lösung über
 - Kräftegleichgewicht, oder
 - Energiebilanz



Einfachste Version: Federpendel

- Feder: rückstellende Kraft
proportional zur Auslenkung
$$F_r = -k \cdot y$$
- Newton'sches Gesetz: Kraft führt
zu Beschleunigung
$$F_N = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}$$
- Kräftegleichgewicht gibt Diff.Gl.

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$



Federpendel

- Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

- Wir erwarten eine Schwingung; daher
Ansatz $y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega t)$ (mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$)

- Zweite Ableitung

$$\ddot{y}(t) = -y_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

- Eingesetzt

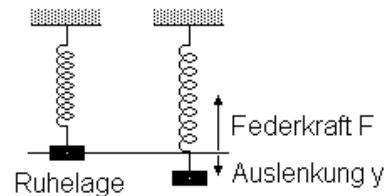
$$-y_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{k}{m} \cdot y_0 \cdot \cos(\omega t) = 0$$

- Vereinfacht

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

- Lösung für die Schwingungsfrequenz

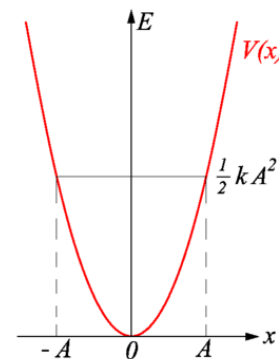
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Bei $y = 0$ nur kinetische Energie
 Bei maximaler Auslenkung nur potentielle Energie

Harmonischer Oszillator

- Federpendel entspricht dem harmonischen Oszillator
- Lineare Rückstellkraft $F_r = -k \cdot x$ kann als quadratisches Potential dargestellt werden
- Maximale potentielle Energie an den Umkehrpunkten
- Nur kinetische Energie bei $x = 0$

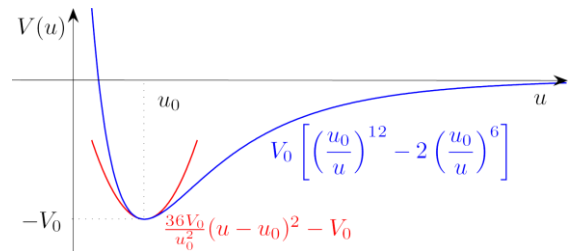




Harmonischer Oszillator

- Kann für viele Probleme in der Physik eingesetzt werden
- Z.B. Wechselwirkung zwischen ungeladenen Atomen in einem Molekül
 - Anziehendes van-der-Waals Potential (Dipole) $\sim -u^{-6}$
 - Für $u \rightarrow 0$: Pauli-Prinzip führt auf abstoßendes Potential $\sim +u^{-12}$
- Für kleine Auslenkungen: Reihenentwicklung um Gleichgewichtslage $u \approx u_0$

$$V(u \approx u_0) = \frac{36 V_0}{u_0^2} (u - u_0)^2 - V_0$$



Rückstellende Kraft als Ableitung des Potentials

$$F(u) = -\frac{dV}{du} = -k \cdot u$$

Elektrisches Pendel

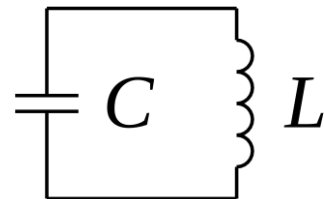


- Oszillatorkreis bestehend aus Kapazität C und Induktivität L
- Bewegte Ladung q entspricht Auslenkung u
- Elektronen im aufgeladenen Kondensator entsprechen potentieller Energie, $k \hat{=} 1/C$
- Bewegte Elektronen = elektrischer Strom durch Spule L entsprechen kinetischer Energie, $m \hat{=} L$
- Maschenregel (Summe der Spannungen = 0) führt auf

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

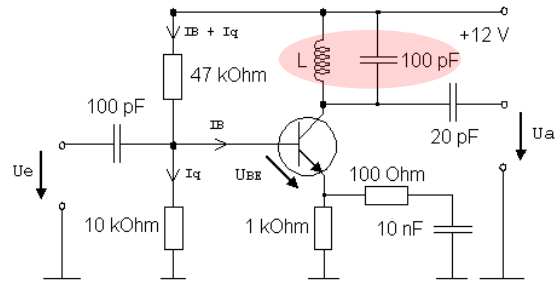
- Lösung: harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



Erzwungene Schwingung

- Sinussignal u_e mit z.B. 2 MHz am Eingang
- Oberschwingungen (Harmonische Frequenzen) werden durch nichtlinearen Transistor erzeugt
- Selektion einer Oberwelle u_a durch Dimensionierung des **LC-Schwingkreis** am Ausgang, z.B. $4 \times 2 \text{ MHz} = 8 \text{ MHz}$
- Verwendung als Frequenzvervielfacher



Energiebilanz im Harmonischen Oszillator

- Statt Kräftegleichgewicht: Lösung über Energiebilanz

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 u^2}{2}$$

- mit Impuls

$$p = mv = m\dot{u}$$

- und kinetischer Energie

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

- und in der Feder gespeicherter (potentieller) Energie

$$\frac{m\omega_0^2 u^2}{2} = \frac{1}{2} k u^2$$

- Für die Energiebilanz gilt das Hamiltonsche Prinzip der „minimalen Wirkung“

- d.h. das System „bewegt sich“ auf einem Pfad, der die Gesamtenergie minimiert

- dies führt auf die „kanonischen Gleichungen“

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u}$$

- Hier sind u und p die generalisierten Koordinaten und Impulse

- Anwendung auf H ergibt wieder die Diff.Gl.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$



Energiebilanz

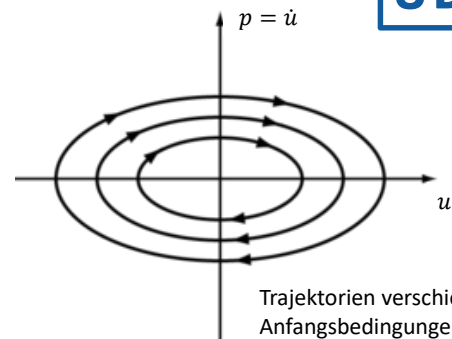
- Hamiltonian ist zeitlich konstant (ohne Reibung)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 u^2}{2} = E$$

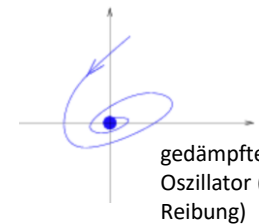
- Entspricht einer Ellipsengleichung im Koordinatensystem $(u, p = \dot{u})$

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega_0^2 u^2}{2E} = 1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \quad (\text{Halbachsen } a, b)$$

- Gesamtenergie entspricht der Fläche der Ellipse $A = \pi \cdot a \cdot b = 2\pi E / \omega_0$



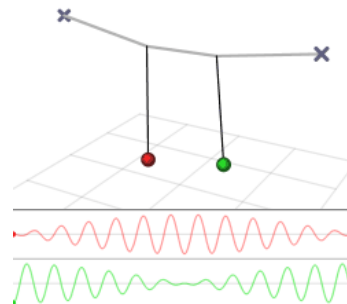
Trajektorien verschiedener Anfangsbedingungen des ungedämpften Oszillators



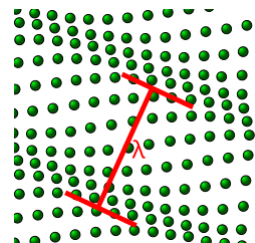
gedämpfter Oszillator (mit Reibung)

Gekoppelte Pendel

- Amplitudenmodulation der einzelnen Schwingungen
- Kopplung der beiden Pendel beschreibt Energieübertrag
- Erweiterung z.B. auf viele Atome in einem Festkörper (Kristall): kollektive Schwingungsbewegung → Phononen, Wärmeleitung, Schallausbreitung



Energieübertrag zwischen den Pendeln mit zweiter charakteristischer Frequenz



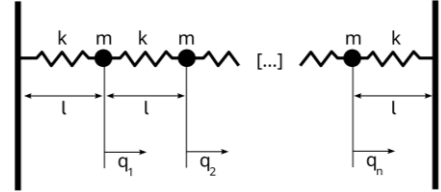
Viele gekoppelte Atome im Kristall: Anregung zu Gitterschwingung



Schwingende Saite

- Viele (n) gekoppelte Pendel in einer Linie
- Gesamtenergie durch Wechselwirkung mit nächstem Nachbar und Bewegung um Ruhelage

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 - \frac{k}{2} \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^2$$



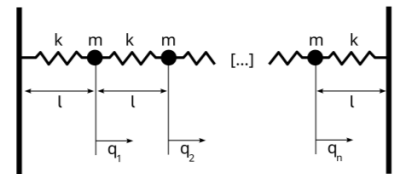
- Daraus Bewegungsgleichung (Kräfte)
 $m\ddot{q}_i = k[(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})]$

Schwingende Saite

- Bewegungsgleichung (Kräfte, Wdh.)
 $m\ddot{q}_i = k[(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})]$

- Teilen durch (kl^2)

$$\frac{m}{kl^2} \ddot{q}_i = \frac{1}{l} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{l} - \frac{(q_i - q_{i-1})}{l} \right)$$



- Kontinuumsübergang
 $i \rightarrow x = i \cdot l ; q_i(t) \rightarrow \Psi(x, t) ; n \rightarrow \infty ; l \rightarrow 0$
- Linke Seite wird zu

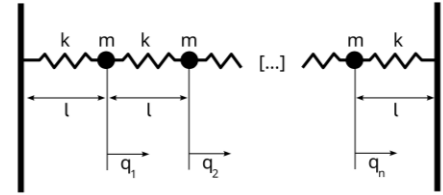
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{mit neuer Konstante } c^2)$$

Zweite Ableitung
nach der Zeit

Schwingende Saite

- Bewegungsgleichung (Wdh.)

$$\frac{m}{kl^2} \ddot{q}_i = \frac{1}{l} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{l} - \frac{(q_i - q_{i-1})}{l} \right)$$



- Rechte Seite wird zu

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \left(\frac{\Psi(x+l, t) - \Psi(x, t)}{l} - \frac{\Psi(x, t) - \Psi(x-l, t)}{l} \right) = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

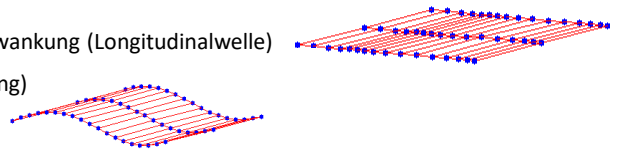
Differenzenquotient der zweiten Ableitung

Zweite Ableitung nach Ortskoordinate

- Gesamtergebnis L.S. = R.S.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

- Wellengleichung → beschreibt periodische Dichteschwankung (Longitudinalwelle)
- Ähnliche Lösung für Transversalwelle (Saitenschwingung)



Lösungen der transversalen Saitenschwingung



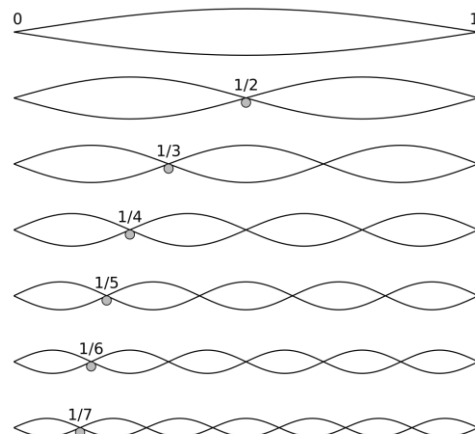
- Randbedingung: die Enden der Saite sind eingespannt und bewegen sich nicht
- Es passen mehrere „Bäuche“ in die Länge der Saite, jeder Bauch hat die Länge einer halben Wellenlänge
- Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

- Ansatz zur Lösung

$$\Psi_n(x, t) = A_n \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_{0n} t)$$

- Mit Wellenzahl $k_n = \frac{\pi n}{L}$;
Schwingfrequenz $\omega_{0n} = k_n c$;
Ausbreitungsgeschwindigkeit c ; $n = 1 \dots \infty$
- Es gibt eine Grundschwingung und Obertöne mit einer vielfachen Frequenz





Einfaches Pendel, gekoppelte Pendel,
ganz viele Pendel...

Jetzt wieder zum eigentlichen
Thema:

„winzige Pendel“



Was passiert für ganz kleine Teilchen?

- Hamiltonfunktion (Energie des Systems) für klassische Systeme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 u^2}{2}$$

- Übergang zur Schrödingergleichung – diese beschreibt quantenmechanische Systeme

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = E\Psi$$

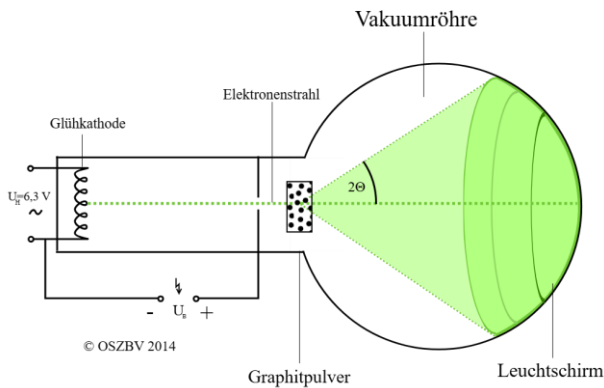
- Gilt für Systeme, die aus Atomen und ähnlich kleinen Teilchen bestehen

- Quantenmechanischer Impulsoperator

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

- Potential V beschreibt äußere und innere Kräfte, z.B. rückstellende Federkraft
- Statt einem Teilchen betrachten wir eine Welle, die das Teilchen beschreibt
- Ort des Teilchens
→ Dichte der **Wellenfunktion**

Wellenfunktion



Harmonischer Oszillator für kleine Teilchen



- Schrödinger Gleichung in einer Dimension mit Federkraft

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x)$$

- Wie findet man eine Lösung für die Wellenfunktion?
 - Ansatz mit speziellen Polynomen
 - Über Leiteroperatoren, die aus einer Lösung die nächst höhere bzw. nächst niedrige erzeugen

Harmonischer Oszillator für kleine Teilchen (2)



- Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x)$$

- Operator 1 : nach unten auf der Leiter

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- Operator 2 : nach oben

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- Mit den beiden Operatoren kann man die SGL schreiben als

$$\hbar \omega \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x)$$

- Führt auf Werte für erlaubte Energien

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

- „Quantenzahlen“ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- niedrigster „Zustand“ für $n = 0$ mit Grundzustands-Energie $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$

Berechnung des Grundzustands



- Vernichtungsoperator

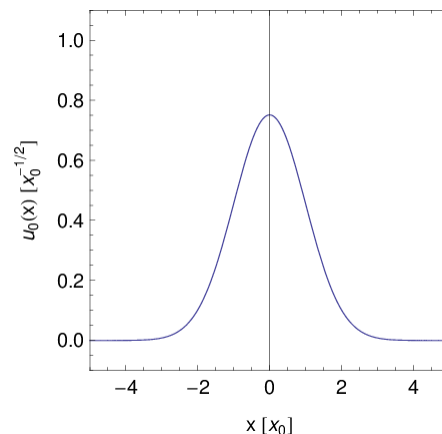
$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- Anwendung von $\hat{b}$ auf Grundzustand gibt Energie

$$\hat{b} \Psi_0(x) = \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_0(x) = 0$$

- Passender Ansatz liefert Lösung

$$\Psi_0(x) = C e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2} \text{ mit } C = (\sqrt{\pi} x_0)^{-1/2}$$





Berechnung höhere Zustände

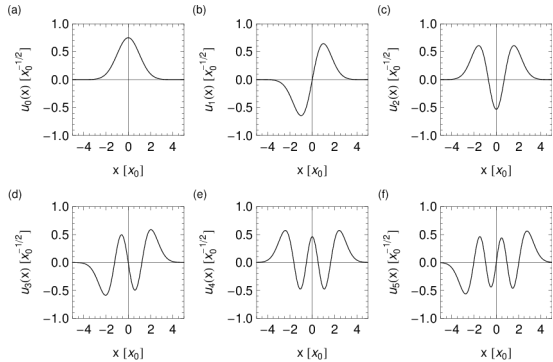
- Erzeugungsoperator

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- Anwendung auf Grundzustand liefert ersten „angeregten“ Zustand

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= (\sqrt{\pi} x_0)^{-1/2} \hat{b}^+ e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2} \\ &= (2\sqrt{\pi} x_0)^{-1/2} \frac{2x}{x_0} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2} \end{aligned}$$

- Und alle weiteren höheren Zustände



Energieskala

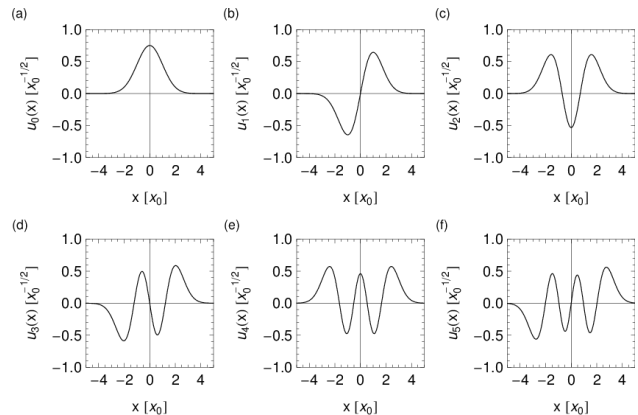
- Erlaubte Energien für das Teilchen im QM-HO

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

- Niedrigste Energie im System

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

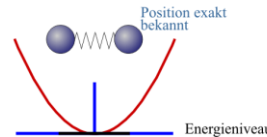
- Widerspricht der klassischen Physik: dort ist $E_0 = 0$ (Teilchen ohne Bewegung)
- Je mehr Oszillationen der Wellenfunktion, umso höher ist die Energie des Teilchens
- Energie ist gequantelt: System kann nur diskrete Werte $E_0, E_1, E_2, E_3, \dots$ annehmen



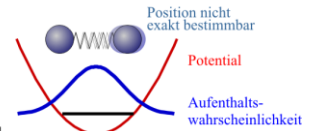
Nullpunktenergie und Grundzustand

- Niedrigste Energie im System
Nullpunktenergie
 $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$
- Die gesamte Lösungsfunktion Ψ beschreibt ein zeitunabhängiges (stationäres) Wellenpaket
- Zeitentwicklung durch Multiplikation mit Phasenfaktor (löst zeitabhängige SGL)
 $e^{-iE_n t/\hbar}$
- Beschreibt Oszillation mit Frequenz ω
- Quantenzahl n beschreibt, mit welcher Amplitude diese Schwingungen angeregt sind

klassischer
Oszillator:



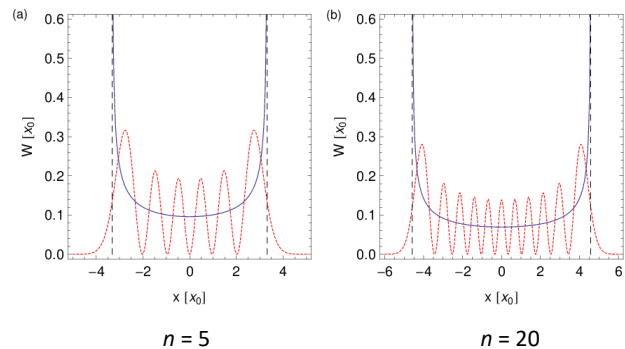
quantenmechanischer
Oszillator:



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi_n(x, t) = E_n \Psi_n(x, t) = i \hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

Vergleich Klassische und Quantenmechanik

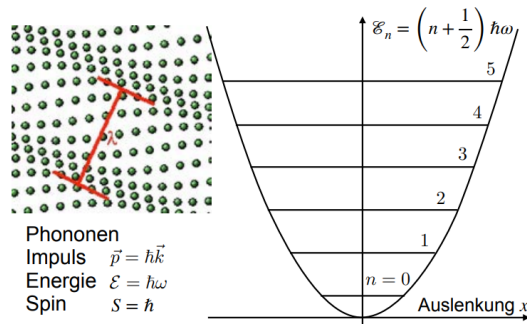
- Klassische Oszillationsbewegung (blau) zwischen Umkehrpunkten
- Alle Amplituden möglich
- Quantenmechanische Lösung (rot) beschreibt Aufenthaltswahrscheinlichkeit
- Kleine Wahrscheinlichkeit, das Teilchen jenseits der Umkehrpunkte anzutreffen
- Nur diskrete „Besetzung“ n von Schwingungsmoden



Anwendung auf Schallwellen im Festkörper



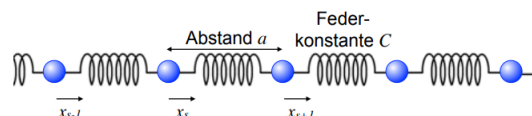
- Bewegung der Atome im Kristall gegeneinander
- Dichtewellen (Schallwellen)
- Quantisierung von Schallwellen: Phononen
- Diskrete Schwingungszustände im Festkörper
- Als Quasiteilchen zu verstehen



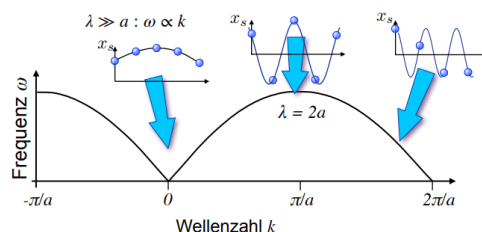
Eindimensionale Atomkette



- Bei langwelliger Anregung lineare „Dispersion“ $\omega(k)$
- Stehende Wellen für $\lambda = 2a$
- Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) als Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ (Steigung der Kurve)



$$M \ddot{x}_s = C(x_{s+1} + x_{s-1} - 2x_s)$$



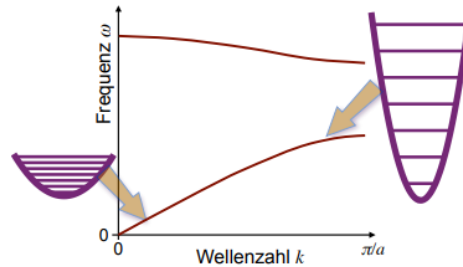
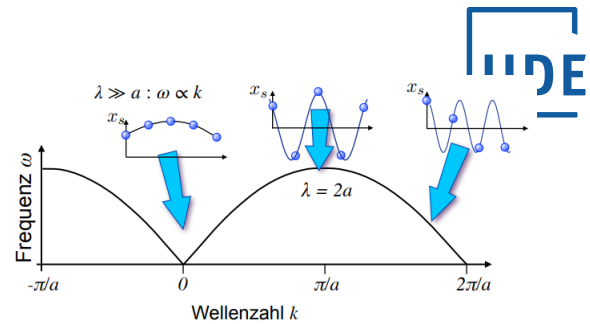
Besetzung der Moden

- Jede Mode ω kann als QMHO verstanden werden
- alle Moden sind unabhängig voneinander
- Ihre Besetzung folgt der Quantenstatistik
- Wahrscheinlichkeit der Besetzung benachbarter Zustände durch Temperatur und Energiedifferenz

$$\frac{N_{n+1}}{N_n} = e^{-\hbar\omega/k_B T}$$

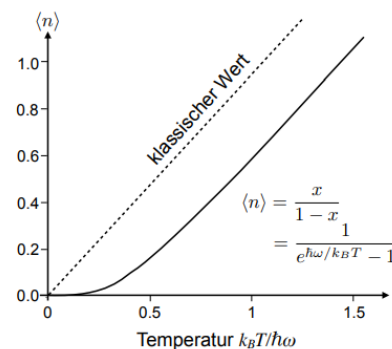
- (Boltzmann-Konstante k_B , thermische Energie kT)
- Je höher die Systemtemperatur, umso mehr höhere Zustände sind besetzt
- Berechnung liefert mittlere Anregung

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$
- Das ist die Planck-Verteilung – gilt auch für Photonen (Lichtteilchen)



Besetzung der Moden (2)

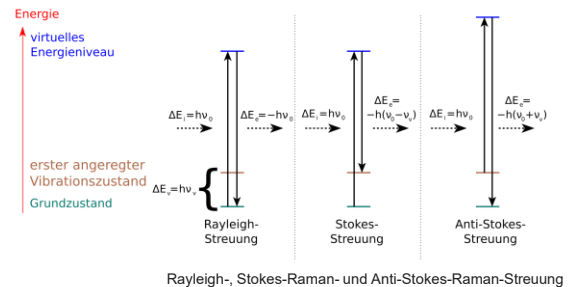
- Bei hohen Temperaturen folgt die Kurve dem klassischen Wert (folgt aus Gleichverteilung der thermischen Energie auf alle Schwingungsmoden)
- Bei tiefen Temperaturen $\frac{k_B T}{\hbar\omega} \sim 0.5$ weicht die Kurve ab, hier sind kaum Phononen vorhanden
- Wegen der Nullpunktenergie verschoben
- Erklärt sehr geringe Wärmeleitung bei tiefsten Temperaturen



Was kann man noch mit Phononen anfangen?



- Erklärung von Elektron-Gitter Streuprozessen im Festkörper: „Reibung“ der Elektronen am Kristallgitter
- Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit
- Lichtstreuung an Gitterschwingungen (Raman), z.B. optische Temperaturmessung in Glasfasern
- Röntgen- und Neutronen- Streuung am Kristall (kristallographische Methoden)



Und was noch mit QM Operatoren?



- Erzeugung und Vernichtung von Photonen
- Laser, Wechselwirkung zwischen Elektronen und Licht
- Quantenfeldtheorie – Quantisierung der elektrischen und magnetischen Felder
- Prozesse zwischen Elementarteilchen (z.B. in Atomen)



Zusammenfassung

- Pendel – harmonischer Oszillator
 - Kleine Pendel- QMHO
 - Operatoren
 - Phononen = Gitterschwingungen im Festkörperkristall
 - Photonen, und mehr
-
- Danke fürs Zuhören!