Computergestützte Ingenieurmathematik

Dr.-Ing. Stefan Bieder

stefan.bieder@uni-due.de +49 203 37-92944 BA 245

Prof. Dr.-Ing. Andreas Czylwik

Ingenieurmathematik
Organisatorisches

- Vorlesung, Übung: Do. 13:00 – 15:30 Uhr
  - Prüfung: schriftlich, 90 Minuten, keine Kofferklausur
- Projektpraktikum (Online / Präsenz ?)
  Mi. 8:30-10:xx Uhr (Gr. 1) Betreuer: Dr. S. Bieder, Dr. L. Häring
  - Anmeldung notwendig, LSF bis 15.04.2024, Beginn 17.04.2024
  - Bestanden, wenn 10 von 12 Terminen erfolgreich besucht wurden
  - MATLAB© kostenlos für Studierende, Bezug über ZIM
- Modul „Computergestützte Ingenieurmathematik“, (5 Cr)
  - Bestanden durch Bestehen der Vorlesung & des Projektpraktikums
  - Benotung: Klausurergebnis
- Unterlagen im Moodle-Kurs

Ingenieurmathematik
Organisatorisches

- Pingu-Abfrage: Projektpraktikum - Online oder Präsenz
    - QR-Code zur Website https://pingo.coactum.de/544129

Ingenieurmathematik
Literatur

- Literatur zur Vorlesung:
  - J. H. Mathews, K. D. Fink: Numerical methods using MATLAB
  - Törnig, Spellucci: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
  - Weller: Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
  - Dahmen: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (online)

Ingenieurmathematik

Inhalt

1 Einführung: Zugeschnittene Größengleichungen

2 Funktionen: Interpolation und Approximation durch Polynome

3 Anpassung von Kurven

4 Vektoren und Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme

6 Nichtlineare Gleichungen

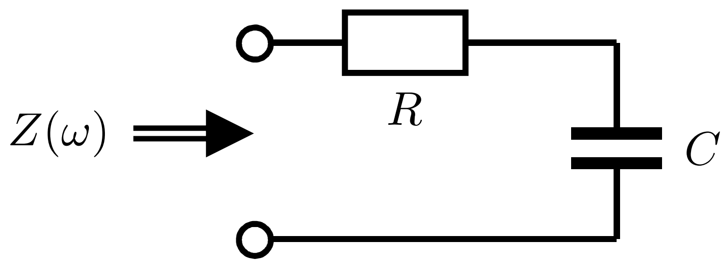
7 Differentiation

8 Integration (einschließlich Faltung)

9 Differentialgleichungen (gewöhnliche)

10 Spektrale Analyse mittels DFT

- Zugeschnittene Größengleichungen
  - Gleichungen der Physik sind einheitenbehaftet.
  - Alle Variablen haben eine Einheit.
  - Zugeschnittene Größengleichungen durch Erweiterung um die gewünschte Einheit
  - Beispiel: Betrag der Impedanz eines RC-Gliedes:



Ingenieurmathematik

1 Einführung

$$
\begin{aligned}
|Z(\omega)| &= \left|R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} \\
\frac{|Z(\omega)| \cdot \Omega}{\Omega} &= \frac{R \cdot \mathrm{k}\Omega}{\mathrm{k}\Omega} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega \cdot \mathrm{kHz}}{\mathrm{kHz}}\right)^2 \left(\frac{R \cdot \mathrm{k}\Omega}{\mathrm{k}\Omega}\right)^2 \left(\frac{C \cdot \mathrm{nF}}{\mathrm{nF}}\right)^2}} \\
\frac{|Z(\omega)|}{\Omega} &= \frac{R}{\mathrm{k}\Omega} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\mathrm{kHz}}\right)^2 \left(\frac{R}{\mathrm{k}\Omega}\right)^2 \left(\frac{C}{\mathrm{nF}}\right)^2 \cdot \left(\mathrm{k}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{k}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{n}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}\right)^2}} \\
&= \frac{R}{\mathrm{k}\Omega} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{10^6}{\left(\frac{\omega}{\mathrm{kHz}}\right)^2 \left(\frac{R}{\mathrm{k}\Omega}\right)^2 \left(\frac{C}{\mathrm{nF}}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

- Schriftsatz von mathematischen Ausdrücken (DIN EN IEC 80000-x, ANSI/IEEE Std 260.3-1993, IEEE P 260.3)
  - Skalare Variablen und Konstanten: kursiv

    $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$
  - Mathematische Standardfunktionen und Konstanten: gerade

    $u(t) = \mathrm{Re}\left\{U_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}$
  - Physikalische Konstanten: kursiv

    $E = m \cdot c^2$

Ingenieurmathematik
1 Einführung

- Schriftsatz von mathematischen Ausdrücken
  - Empfehlung
    - Zeitfunktionen: Kleinbuchstaben
    - Funktionen im Frequenzbereich: Großbuchstaben

$$H(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau$$

  - Skalare Variablen und Konstanten als Index: kursiv

$$U_k = Z_k \cdot I_k$$

  - Skalare Zahlen als Index: gerade

$$U_1 = Z_1 \cdot I_1$$

  - Physikalische Größen als Index: kursiv

$$\varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I$$

Ingenieurmathematik
1 Einführung

- Vektoren und Matrizen: fett und gerade (DIN EN IEC 80000-x: fett und kursiv)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_N(t) \end{pmatrix}$$

- Empfehlung
  - Vektoren: Kleinbuchstaben
  - Matrizen: Großbuchstaben

Ingenieurmathematik

1 Einführung

- Schriftsatz von mathematischen Ausdrücken
  - Erklärende Indizes: gerade, nicht fett
    - Beispiele: Optische Leistung: $P_{\mathrm{opt}}(t)$ Dopplerfrequenz: $f_{\mathrm{Doppler}} = \frac{v}{\lambda}$
  - Differentialoperator: gerade, nicht fett

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}u$$

  - Klammern und andere Sonderzeichen: gerade
  - Zahlen und physikalische Einheiten werden gerade geschrieben:

$$f_{\mathrm{Doppler}} = \frac{v}{\lambda} = \frac{10\ \mathrm{m/s}}{1\ \mathrm{cm}} = 1\ \mathrm{kHz}$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Kurvendiskussion
  - Definitionsbereich
    - Zeitfunktionen $x = f(t)$: häufig: $-\infty < t < \infty$
    - Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_x(x)$: $-\infty < x < \infty$
  - Wertebereich
    - Positive Funktionen: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x) \geq 0$
    - Funktionen mit eingeschränktem Wertebereich:

      Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen $0 \leq F_x(x) \leq 1$
    - Reellwertige Funktionen: $-\infty < x(t) < \infty$
    - Komplexwertige Funktionen: $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Kurvendiskussion $y = f(x)$
  - Lokale Minima und Maxima: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$
  - Nullstellen, Polstellen: $y(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)} = k \cdot \dfrac{(x - x_{\mathrm{N},1}) \cdot (x - x_{\mathrm{N},2}) \cdots}{(x - x_{\mathrm{P},1}) \cdot (x - x_{\mathrm{P},2}) \cdots}$
  - Asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{s}(t) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_0}} + \dfrac{t}{t_0} \right) = \dfrac{t}{t_0}$
  - Symmetrien

- Koordinatentransformation

$$y = f(x) \qquad y = f(ax) \qquad y = f(x - x_0) \qquad y = f(ax - b) \qquad y = f(g(x))$$

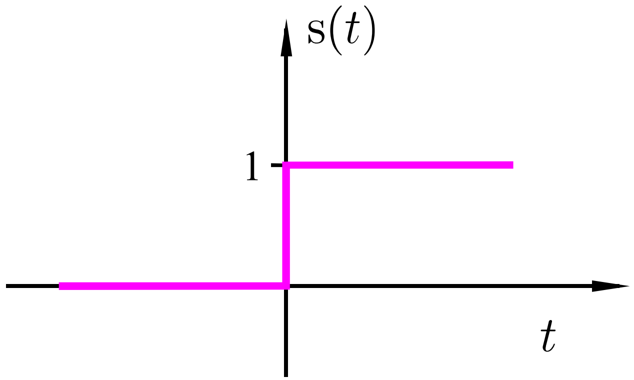
Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Differentiation von Funktionen: $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
  - Abschnittsweise definierte Funktionen
  - Unstetigkeitsstellen der Funktion oder von Ableitungen der Funktion
  - Ableitung der Sprungfunktion: δ–Funktion

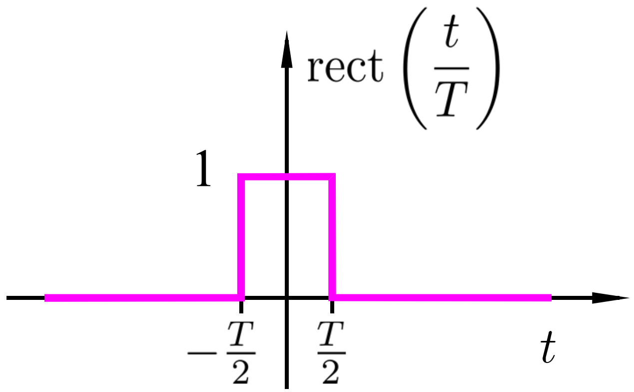
- Integration von Funktionen: $y_{\mathrm{I}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} y(u)\, \mathrm{d}u$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Abschnittsweise definierte Funktionen
  - Hilfsfunktionen
    - Sprungfunktion

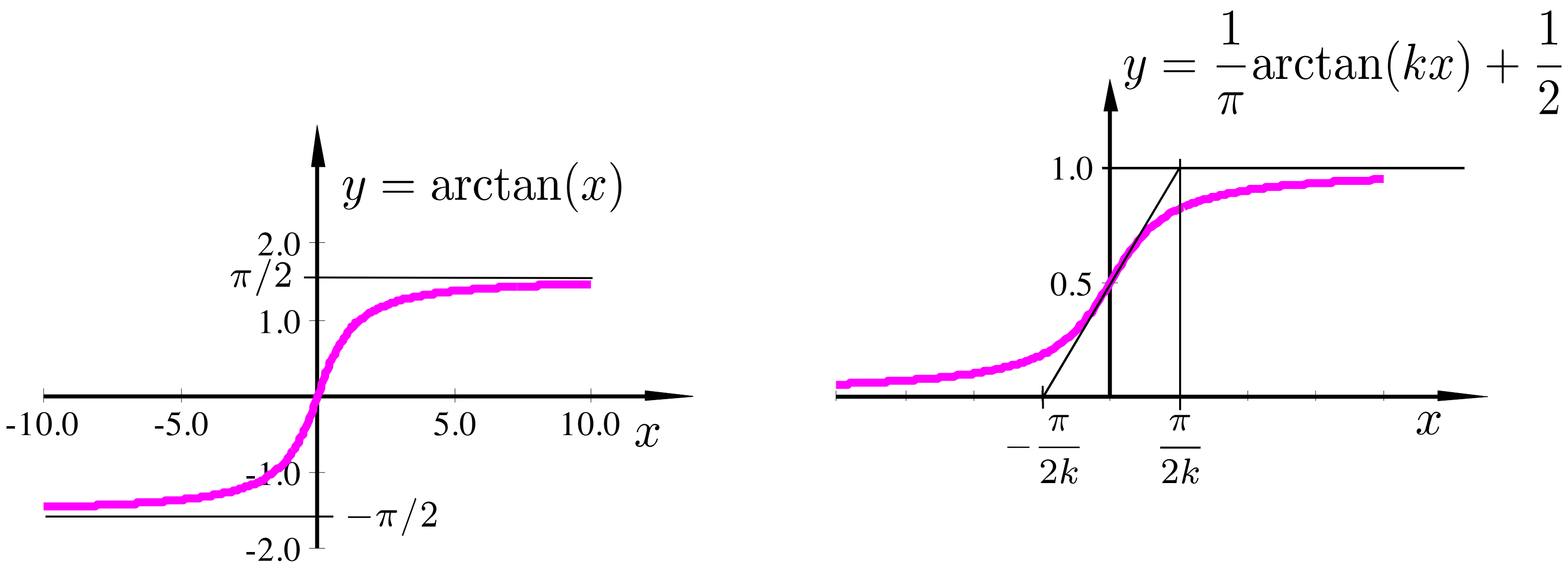


    - Rechteckfunktion



Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Arkustangens-Funktion als Näherung für die Sprungfunktion



Ingenieurmathematik
2 Funktionen

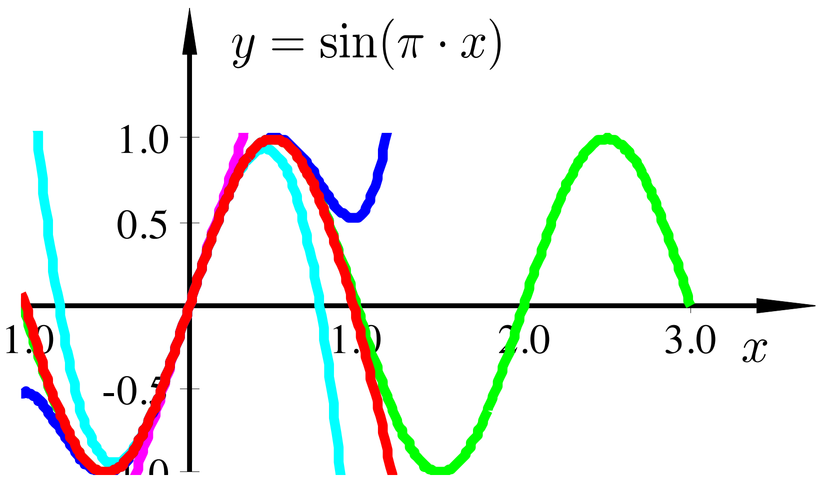
- Approximation von Funktionen
  - Taylor-Reihe (Voraussetzung: Differenzierbarkeit)

$$
\begin{aligned}
f(x \approx x_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left.\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}\right|_{x_0} \frac{1}{i!}(x - x_0)^i \\
&= f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \frac{1}{1!}(x - x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Beispiel einer Approximation durch eine Taylor-Reihe

$$y = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$



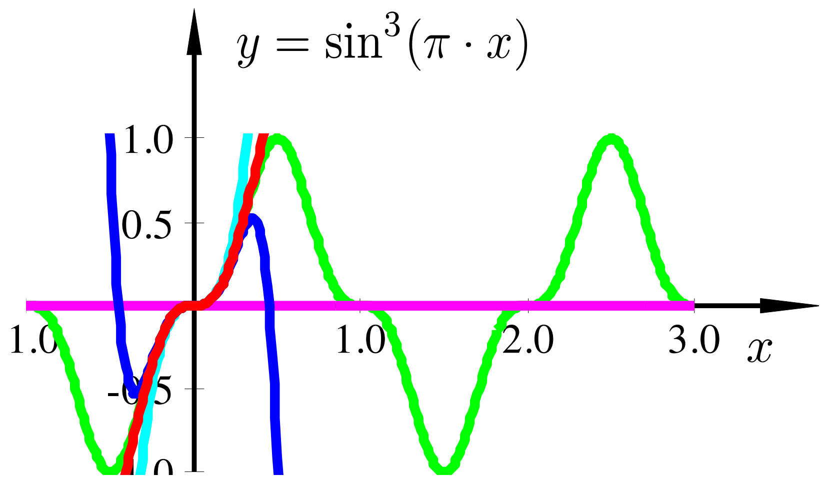
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Beispiel einer Approximation durch eine Taylor-Reihe

$$y = \sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3^3-3}{3!}x^3 - \frac{3^5-3}{5!}x^5 + \frac{3^7-3}{7!}x^7 - \cdots\right)$$



- Taylor-Reihe: $f(x_0), \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}, \left.\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}, \ldots$ müssen bekannt sein.

- **Interpolation mit Hilfe eines Polynoms:** Eine Funktion ist an den Stützstellen $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_N, y_N)$ mit $a \leq x_i \leq b$ bekannt.
  - $N + 1$ Punkte $\Rightarrow$ Polynom vom Grad N
  - Interpolierte Werte: $a \leq x \leq b$
  - Extrapolierte Werte: $x < a$ oder $x > b$
  - Vorteile der Interpolation durch ein Polynom:
    - exakte Übereinstimmung an den Stützstellen
    - Stützstellen müssen nicht äquidistant sein
    - einfach auszuwerten
    - differenzierbar

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Beispiel der Interpolation mit Hilfe eines Polynoms: Eine Funktion verläuft durch folgende Punkte: $(1,1), (2,2), (3,1), (5,1)$
  - Polynom: $y(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3$
  - Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot c_0 + 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 \\
2 &= 1 \cdot c_0 + 2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + 8 \cdot c_3 \\
1 &= 1 \cdot c_0 + 3 \cdot c_1 + 9 \cdot c_2 + 27 \cdot c_3 \\
1 &= 1 \cdot c_0 + 5 \cdot c_1 + 25 \cdot c_2 + 125 \cdot c_3
\end{aligned}$$

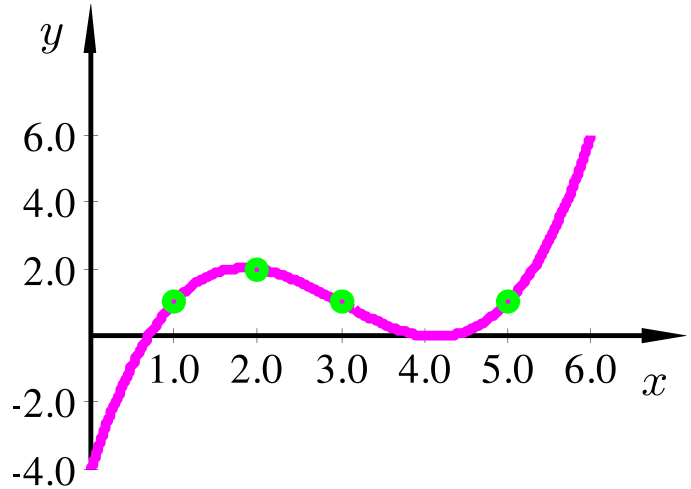
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Lösung:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 23/3 \\ -3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$



- Anderer Ansatz mit Hilfe von **Lagrange-Polynomen**
  - Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$y(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

  - Alternative Schreibweise:

$$y(x) = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = y_0 \cdot L_{1,0}(x) + y_1 \cdot L_{1,1}(x)$$

  - $L_{1,0}(x)$ und $L_{1,1}(x)$ heißen Lagrange-Polynome
  - Eigenschaften: $L_{1,0}(x_0) = 1$ und $L_{1,0}(x_1) = 0$
    sowie $L_{1,1}(x_0) = 0$ und $L_{1,1}(x_1) = 1$

- Polynom N-ten Grades:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k \cdot L_{N,k}(x)$$

- Lagrange-Polynome:

$$\begin{aligned} L_{N,k}(x) &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_N)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_N)} \\ &= \frac{\prod\limits_{n=0,n\neq k}^{N}(x-x_n)}{\prod\limits_{n=0,n\neq k}^{N}(x_k-x_n)} \end{aligned}$$

- Eigenschaften:

$$L_{N,k}(x_n) = 1 \text{ für } n = k \quad \text{und} \quad L_{N,k}(x_n) = 0 \text{ für } n \neq k$$

- Beispiel: Polynom 2. Grades

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
&\quad + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}
$$

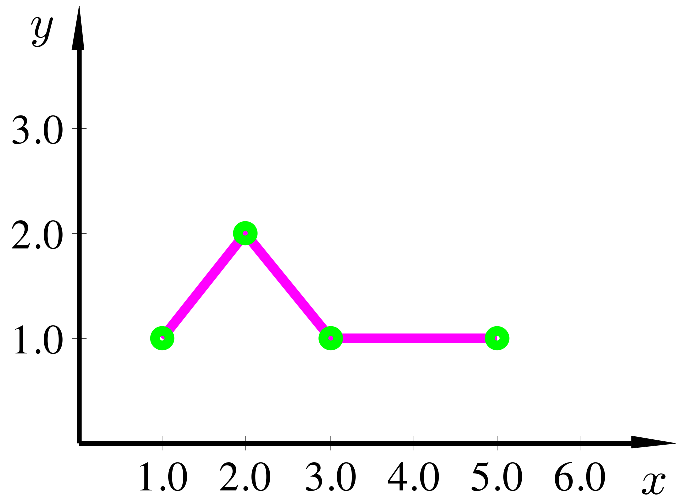
- Beispiel: Polynom 3. Grades

$$\begin{aligned} P_3(x) \quad = \quad & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ & + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Stückweise lineare Interpolation

$$P_{\mathrm{lin},k}(x) = y_k \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \text{für} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}$$



Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Stückweise Interpolation durch Polynome höherer Ordnung: **kubische Splines**

$$S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1} \cdot (x - x_k) + s_{k,2} \cdot (x - x_k)^2 + s_{k,3} \cdot (x - x_k)^3$$

für $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ und $k = 0, 1, \ldots, N-1$

- Vorteil: erste und zweite Ableitung der Interpolationsfunktion sind stetig
- Definition der Spline-Funktionen:

$$\begin{array}{ll}
S_k(x_k) = y_k & \text{für } k = 0, 1, \ldots, N-1 \\
S_k(x_{k+1}) = y_{k+1} & \text{für } k = 0, 1, \ldots, N-1 \\
S_k'(x_{k+1}) = S_{k+1}'(x_{k+1}) & \text{für } k = 0, 1, \ldots, N-2 \\
S_k''(x_{k+1}) = S_{k+1}''(x_{k+1}) & \text{für } k = 0, 1, \ldots, N-2 \\
S_0''(x_0) = 0 \text{ und } S_{N-1}''(x_N) = 0 & \text{Randbedingungen (links und rechts)}
\end{array}$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Berechnung:

$$s_{k,0} = y_k \qquad s_{k,1} = d_k - \frac{h_k \cdot (2m_k + m_{k+1})}{6}$$

$$s_{k,2} = \frac{m_k}{2} \qquad s_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k}$$

mit:

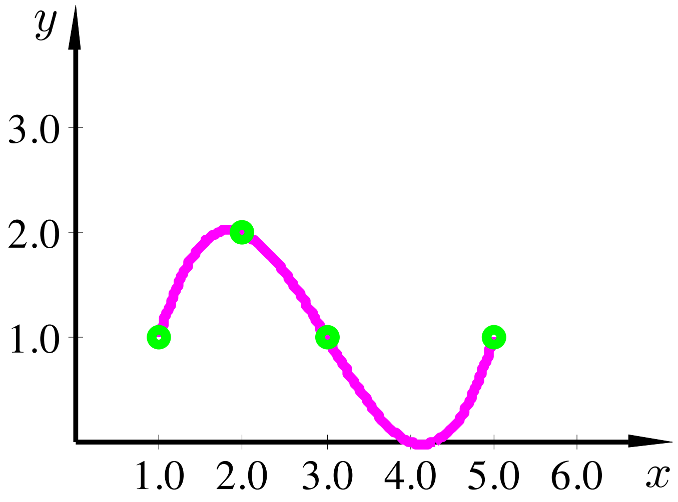
$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

$$d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$h_{k-1} \cdot m_{k-1} + 2 \cdot (h_{k-1} + h_k) \cdot m_k + h_k \cdot m_{k+1} = 6 \cdot (d_k - d_{k-1})$$
$$(\text{für } k = 1, \ldots, N-1)$$

$$m_0 = m_N = 0$$

- Beispiel: Spline-Interpolation



Ingenieurmathematik
2 Funktionen

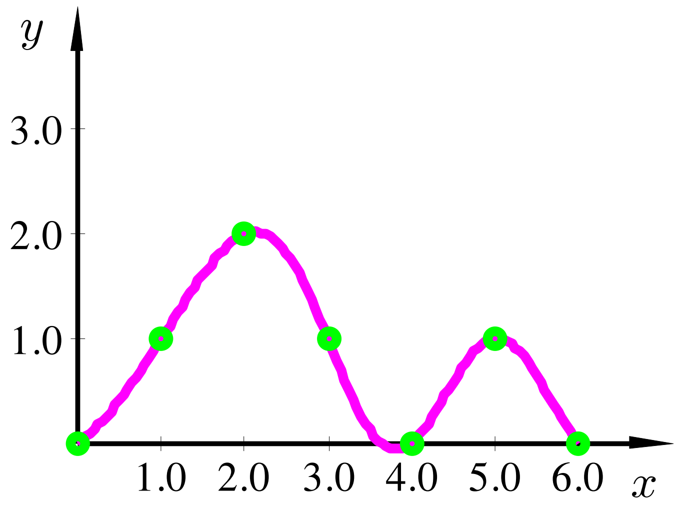
- Interpolation im Fall einer idealen Bandbegrenzung
  - Abtasttheorem ist erfüllt
  - Voraussetzung: äquidistante Abtastwerte $(t_k = k \cdot T_\mathrm{a}, y_k)$
  - Interpolation durch si-Funktionen:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot \mathrm{si}\left(\frac{\pi}{T_\mathrm{a}}(t - kT_\mathrm{a})\right)$$

$$\text{wenn } Y(\omega) = 0 \text{ für } |\omega| \geq \frac{\pi}{T_\mathrm{a}} = \frac{\omega_\mathrm{a}}{2}$$

Ingenieurmathematik
2 Funktionen

- Beispiel für Interpolation durch si-Funktionen:



- Anpassung von Kurven an Daten (Messwerte)
  - Ausgleichsgerade

    $y = f(x) = A \cdot x + B$
  - Gegeben: Wertepaare $(x_k, y_k),\ k = 1 \ldots N$

    $f(x_k) = y_k + e_k$
  - Fehlernormen:
    - Maximaler Fehler: $E_\infty = \max\limits_{1 \le k \le N} |f(x_k) - y_k|$
    - Mittlerer Fehlerbetrag: $E_1 = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} |f(x_k) - y_k|$
    - Mittlerer quadratischer Fehler: $E_2 = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} (f(x_k) - y_k)^2$

Ingenieurmathematik

3 Anpassung von Kurven an Daten

- Ausgleichsgerade, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert:

$$E_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (A \cdot x_k + B - y_k)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot (A \cdot x_k + B - y_k) \cdot x_k = 0$$

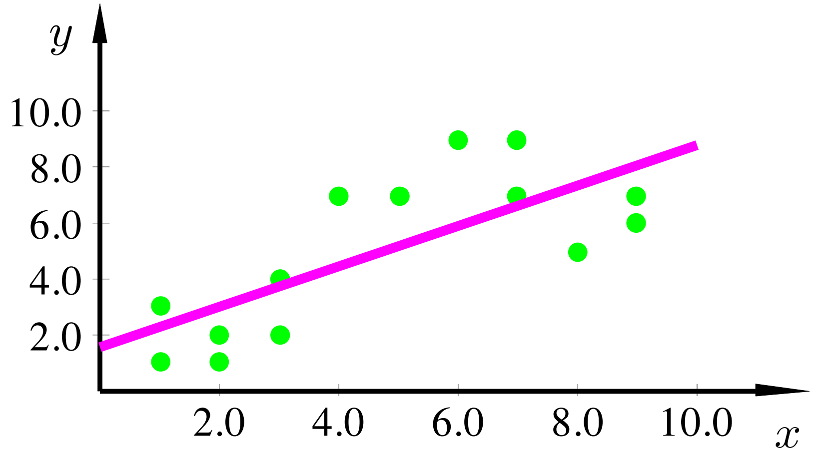
$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}B} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot (A \cdot x_k + B - y_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(A \cdot x_k^2 + B \cdot x_k - y_k \cdot x_k\right) = A \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k^2 + B \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k - \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot x_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} (A \cdot x_k + B - y_k) = A \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k + B \cdot N - \sum_{k=1}^{N} y_k = 0$$

Ingenieurmathematik
3 Anpassung von Kurven an Daten

- Beispiel einer Ausgleichsgeraden $y = A \cdot x + B$



Ingenieurmathematik

3 Anpassung von Kurven an Daten

- Optimierte Potenzfunktion: $y = f(x) = A \cdot x^M$
- Potenzfunktion, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert:

$$E_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(A \cdot x_k^M - y_k\right)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot \left(A \cdot x_k^M - y_k\right) \cdot x_k^M = 0$$

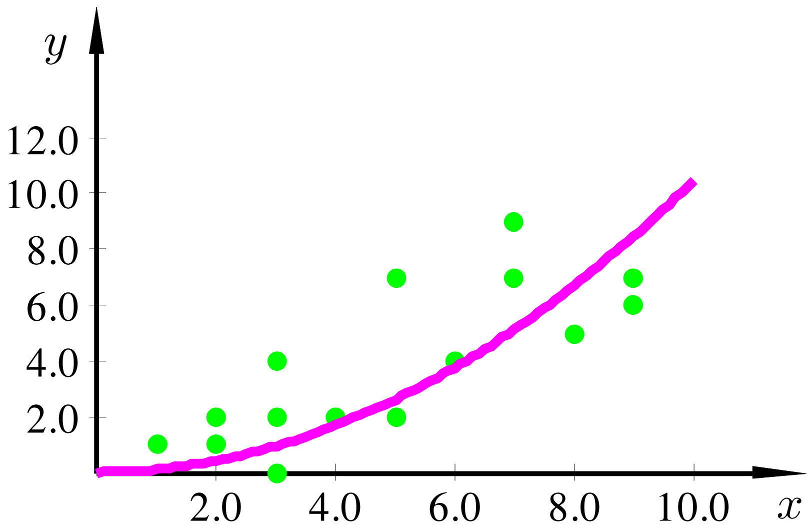
$$\sum_{k=1}^{N} A \cdot x_k^{2M} = \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot x_k^M$$

$$A = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} y_k \cdot x_k^M}{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^{2M}}$$

Ingenieurmathematik

3 Anpassung von Kurven an Daten

- Beispiel: optimale Parabel $y = A \cdot x^2$



- Optimierte Exponentialfunktion: $y = f(x) = A \cdot \mathrm{e}^{x} + B$
- Exponentialfunktion, die den mittleren quadratischen Fehler minimiert:

$$E_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(A \cdot \mathrm{e}^{x_k} + B - y_k\right)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot \left(A \cdot \mathrm{e}^{x_k} + B - y_k\right) \cdot \mathrm{e}^{x_k} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}B} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot \left(A \cdot \mathrm{e}^{x_k} + B - y_k\right) = 0$$

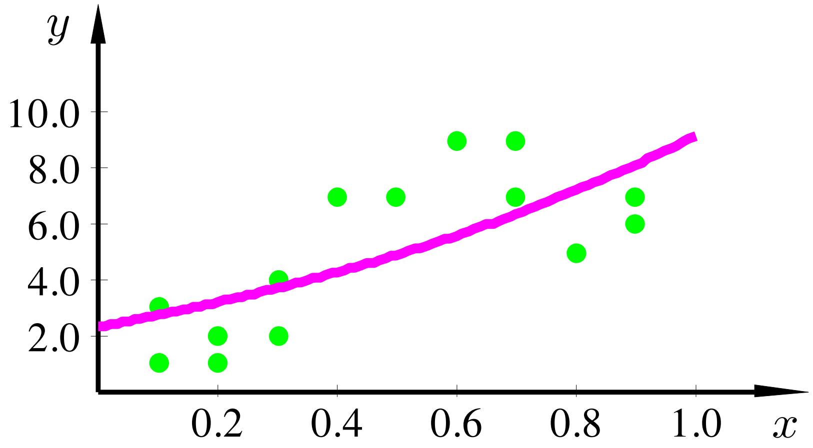
$$A \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2x_k} + B \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{x_k} - \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot \mathrm{e}^{x_k} = 0$$

$$A \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{x_k} + B \cdot N - \sum_{k=1}^{N} y_k = 0$$

Ingenieurmathematik

3 Anpassung von Kurven an Daten

- Beispiel einer optimierten Exponentialfunktion $y = A \cdot \mathrm{e}^{x} + B$



Ingenieurmathematik
3 Anpassung von Kurven an Daten

- Lösungen sind durch lineare Gleichungssysteme gegeben, solange die zu optimierenden Parameter Koeffizienten sind
- Lösungen sind durch nichtlineare Gleichungssysteme gegeben, wenn Parameter der Funktionen zu optimieren sind
  - Beispiel: $y = f(x) = A \cdot x^M$

$$E_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(A \cdot x_k^M - y_k\right)^2 \to \min$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot \left(A \cdot x_k^M - y_k\right) \cdot x_k^M = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}M} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 2 \cdot \left(A \cdot x_k^M - y_k\right) \cdot A \cdot x_k^M \cdot \ln(x_k) = 0$$

- Weitere Lösungsmöglichkeit durch Linearisierung der zu optimierenden Funktion:

  $$y = A \cdot x^M$$

  $$\ln(y) = M \cdot \ln(x) + \ln(A)$$

  - Transformationen:

    $$Y = \ln(y), \quad X = \ln(x), \quad B = \ln(A)$$
    $$\Longrightarrow \quad Y = M \cdot X + B$$

  - Problem: es wird der mittlere quadratische Fehler der transformierten Daten minimiert

- Definition einer Matrix
  - rechteckiges Feld von $n \times m$ reellen oder komplexen Elementen a_{ij}
  - n Zeilen und m Spalten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

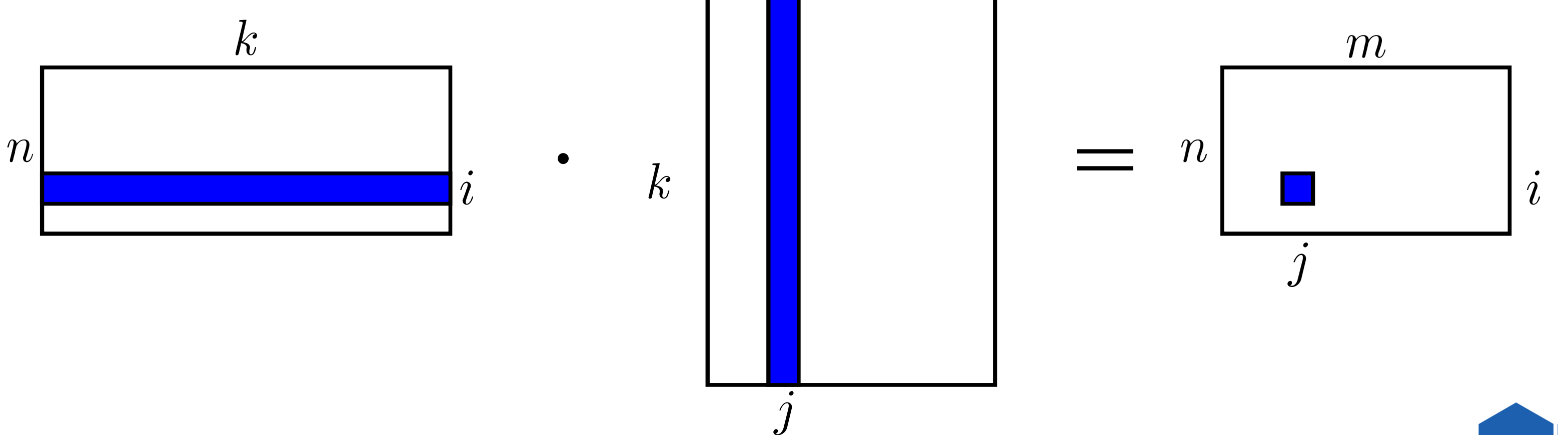
  - $m = 1 \Longrightarrow$ Spaltenvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - $n = 1 \Longrightarrow$ Zeilenvektor

    $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$

Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Einfache Operationen
  - Multiplikation mit einem Skalar: $\mathbf{B} = c \cdot \mathbf{A} \Longrightarrow b_{ij} = c \cdot a_{ij}$
  - Summe zweier Matrizen: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Longrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - Multiplikation zweier Matrizen: $n \times k$ -Matrix $\mathbf{A}$ mal $k \times m$ -Matrix $\mathbf{B}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Longrightarrow c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n \quad \text{und} \quad j = 1 \ldots m$$



Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Gesetze
  - Addition
    - Kommutativgesetz: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
    - Assoziativgesetz: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
  - Multiplikation
    - Kommutativgesetz gilt nicht: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
    - Assoziativgesetz: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
    - Distributivgesetz: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

- Definitionen
  - Potenz einer quadratischen Matrix: $\mathbf{A}^l = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}}_{l \text{ Faktoren}}$
  - Einheitsmatrix:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

    - Multiplikation einer quadratischen $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

  - Inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

  - $\mathbf{A}$ heißt *nicht-singulär*, wenn $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

- Definitionen
  - Negative Potenz einer quadratischen Matrix: $\mathbf{A}^{-l} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{l}$
  - Transponierte einer $n \times k$ -Matrix $\mathbf{A}$: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

    mit $b_{ij} = a_{ji}$
  - Konjugiert-komplexe $n \times k$ -Matrix $\mathbf{A}$: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{*}$

    mit $b_{ij} = a_{ij}^{*}$
  - Adjungierte / transjugierte / hermitesch transponierte $n \times k$ -Matrix $\mathbf{A}$:

    $\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{*} = \mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ mit $b_{ij} = a_{ji}^{*}$
- Rechenregeln:

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$
$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{H}} = \mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \qquad \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{H}}$$

Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Rechenregeln:
  - Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

  - Skalarprodukt zweier komplexer Spaltenvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}\right)^*$$

- Definition
  - Orthogonale Vektoren: $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = 0$

Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Definitionen
  - Spur (trace) einer quadratischen Matrix: $\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
    - Eigenschaften:

      $\mathrm{tr}\left(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}\right) = \alpha\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}\right) + \beta\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}\right)$
    - Quadratische Matrizen:

      $\mathrm{tr}\left(\mathbf{AB}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{BA}\right)$

      $\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{B}\right)$
    - Beliebige $n \times k$ -Matrizen $\mathbf{A}$:

      $\mathrm{tr}\left(\mathbf{AA}^{\mathrm{H}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2$
    - Skalarprodukt zweier komplexer Spaltenvektoren: $\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y} = \left(\mathrm{tr}\left(\mathbf{xy}^{\mathrm{H}}\right)\right)^*$

- Definitionen
  - Determinante einer quadratischen Matrix:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\; a_{ij}\; \det(\mathbf{U}_{ij})}_{\text{Entwicklung nach Zeile } i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\; a_{ij}\; \det(\mathbf{U}_{ij})}_{\text{Entwicklung nach Spalte } j}$$

- Beispiele

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Eigenschaften von Determinanten:

$\det(\mathbf{A}) = 0$ wenn eine Zeile oder Spalte $\mathbf{0}$ ist
oder $\mathbf{A}$ linear abhängige Zeilen hat
oder $\mathbf{A}$ linear abhängige Spalten hat

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\det(\mathbf{A}) = \left[\det\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\right)\right]^{*}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = [\det(\mathbf{A})]^{-1}$$

$$\det(c\mathbf{A}) = c^{n} \cdot \det(\mathbf{A})$$

- Eigenwerte und Eigenvektoren
  - Gegeben: quadratische $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und Spaltenvektor $\mathbf{u}$

    $$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$
    $$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

  - Nichttriviale Lösungen nur, wenn die Matrix $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ singulär ist, d.h. wenn

    $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

  - Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
  - Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
  - Die zu λ_i gehörigen Vektoren $\mathbf{u}_i$ heißen Eigenvektoren
  - Eigenschaften:

    $$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- Definition: quadratische Form für $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ und Spaltenvektor $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^* \, a_{ij} \, x_j$$

- Spezielle $n \times n$ Matrizen
  - Positiv-definite Matrix $\mathbf{A}$: alle Eigenwerte sind positiv

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \det\left(\mathbf{A}\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

  - Symmetrische Matrizen: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
  - Hermitesche Matrizen: $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$
  - Orthogonale Matrizen: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - Unitäre Matrizen: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$

- Diagonalmatrix:

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Toeplitz-Matrix: $a_{ij} = \alpha_{i-j}$

Basis: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{-(n-1)} & \alpha_{-(n-2)} & \cdots & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$

Anzahl Elemente: $2n-1$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \cdots & \alpha_{-(n-1)} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \cdots & \alpha_{-(n-2)} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Rang einer $n \times m$ Matrix: Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten
  $\mathrm{Rang}\,(\mathbf{A}) \leq \min\{n, m\}$

  - Rang einer quadratischen $n \times n$ Matrix

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rang}\,(\mathbf{A}) = n \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert} &&\Longleftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ hat vollen Rang} &&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist regulär} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{alle } n \text{ Eigenwerte sind ungleich null}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rang}\,(\mathbf{A}) = k < n \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert nicht} &&\Longleftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ hat nicht vollen Rang} &&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist singulär} \\
&\Longleftrightarrow \quad (n-k) \text{ Eigenwerte sind gleich null}
\end{aligned}$$

  - Rechenregeln:
    $\mathrm{Rang}\,(-\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Rang}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\right) = \mathrm{Rang}\,(\mathbf{A})$
    $\mathrm{Rang}\,(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{Rang}\,(\mathbf{A}), \mathrm{Rang}\,(\mathbf{B})\}$

Ingenieurmathematik
4 Vektoren und Matrizen

- Diagonalisierung einer Matrix
  - Gegeben: quadratische $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$
  - Linear unabhängige Eigenvektoren und Eigenwerte

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{x}_2 \qquad \cdots \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n = \lambda_n \cdot \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$$

Ingenieurmathematik

5 Lineare Gleichungssysteme

- Lineares Gleichungssystem mit $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$
- $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  eindeutig lösbar, wenn $\mathbf{A}^{-1}$ existiert

  $$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

  $$\Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Ingenieurmathematik
5 Lineare Gleichungssysteme

- Pseudoinverse Matrix
  - Lineares Gleichungssystem mit $n \times k$-Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{b}$$

sofern $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1}$ existiert:

$$\mathbf{x} = \underbrace{\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}}}_{\mathbf{A}^{\dagger}} \cdot \mathbf{b}$$

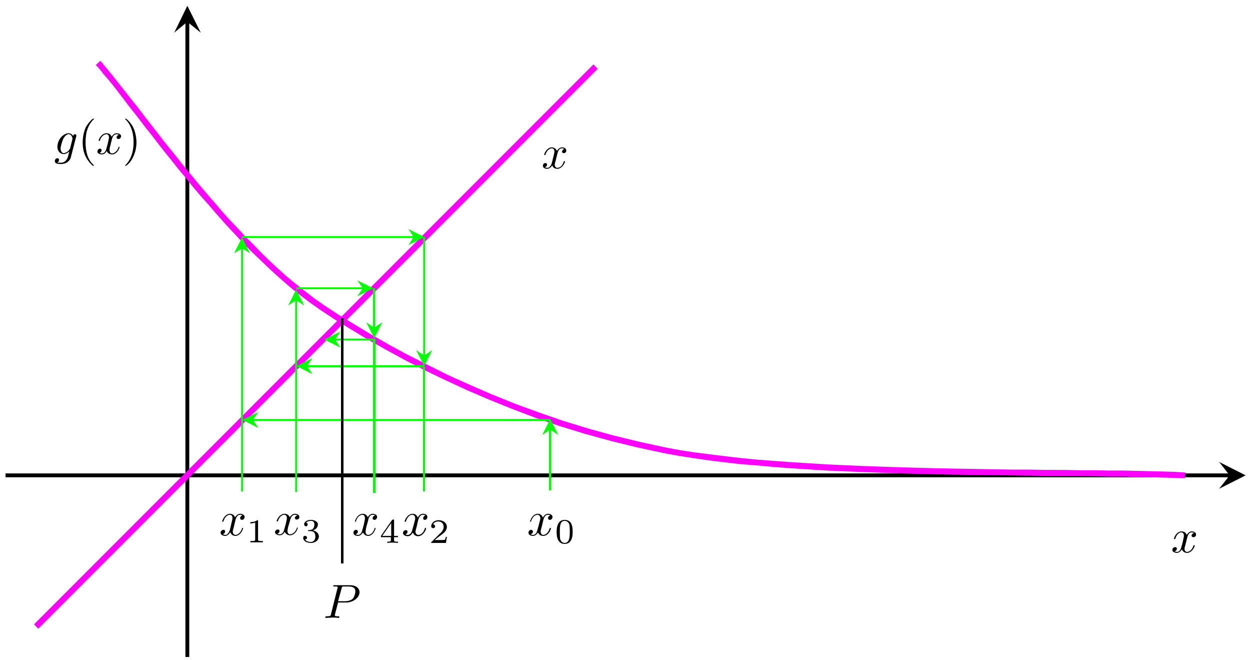
$\mathbf{A}^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ heißt Moore-Penrose-Pseudoinverse der Matrix $\mathbf{A}$

- Näherungslösung der Gleichung $f(x) = 0$
- Fixpunkt-Iterationsverfahren
  - Definition: Ein Fixpunkt P einer Funktion $g(x)$ ist gegeben durch: $P = g(P)$
  - Fixpunkt-Iteration: $x_{n+1} = g(x_n)$
  - Fixpunkt-Satz: Für $x \in [a, b]$ und $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ zu einem eindeutigen Fixpunkt $P \in [a, b]$, wenn gilt:

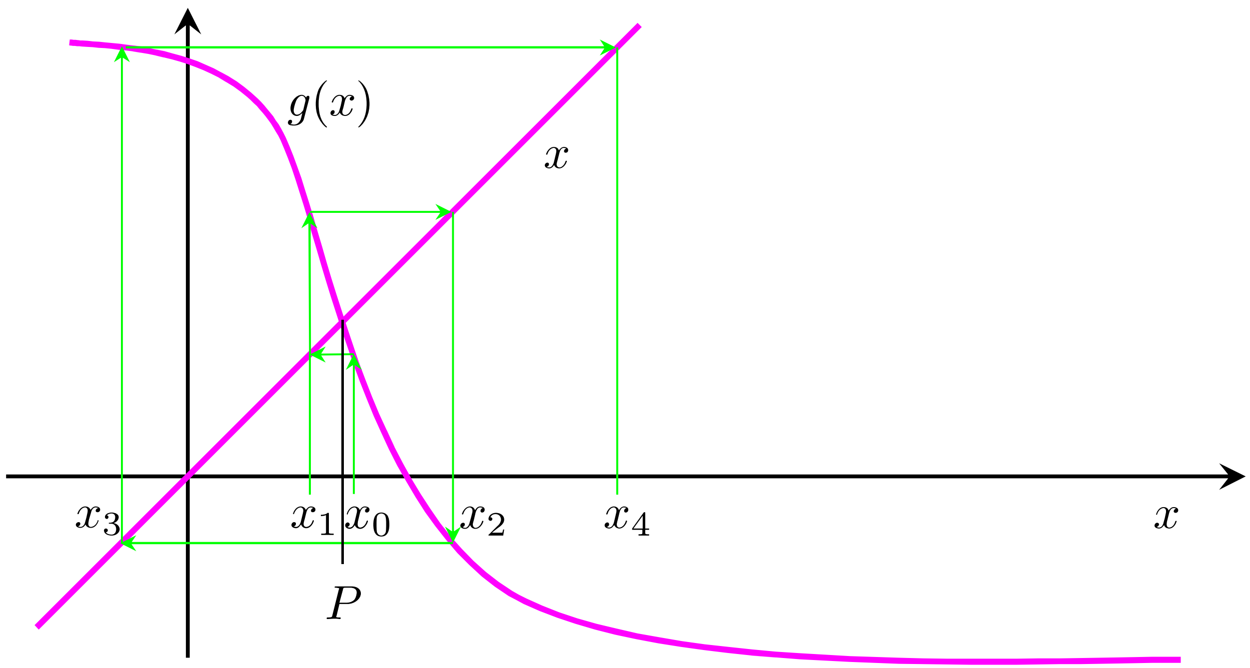
$$|g'(x)| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right| < 1 \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

- Beispiel: $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x} = 0$

  Umformulieren in $x = g(x) \quad \Longrightarrow \quad$ z.B. $\quad x = g(x) = \mathrm{e}^{-x}$



- Beispiel für divergentes Verhalten



Ingenieurmathematik

6 Nichtlineare Gleichungen

- Intervall-Schachtelungsmethode
  - Gesucht: Lösung von $f(x = x_0) = 0$
  - Startpunkt: Intervall $[a, b]$ für das gilt: $f(a) \cdot f(b) < 0$
  - Geforderte Genauigkeit: $b - a < \delta$
  - Iteration:
    - 1. Berechne der Funktionswert $f(m)$ des Mittelpunkts $m = \dfrac{a+b}{2}$
    - 2. Wenn $f(m) \cdot f(a) < 0$ setze $b = m$
    - 3. Wenn $f(m) \cdot f(b) < 0$ setze $a = m$
    - 4. Wenn $f(m) \cdot f(b) = 0$ setze $x_0 = m$
    - 5. Solange $b - a < \delta$ gehe zurück zu Schritt 1.

- Vorteil der Intervallschachtelungsmethode: Sichere Konvergenz in einer zuvor bestimmbaren Anzahl von N Iterationen

$$\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2^N} < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad N > \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{2\delta}\right)$$

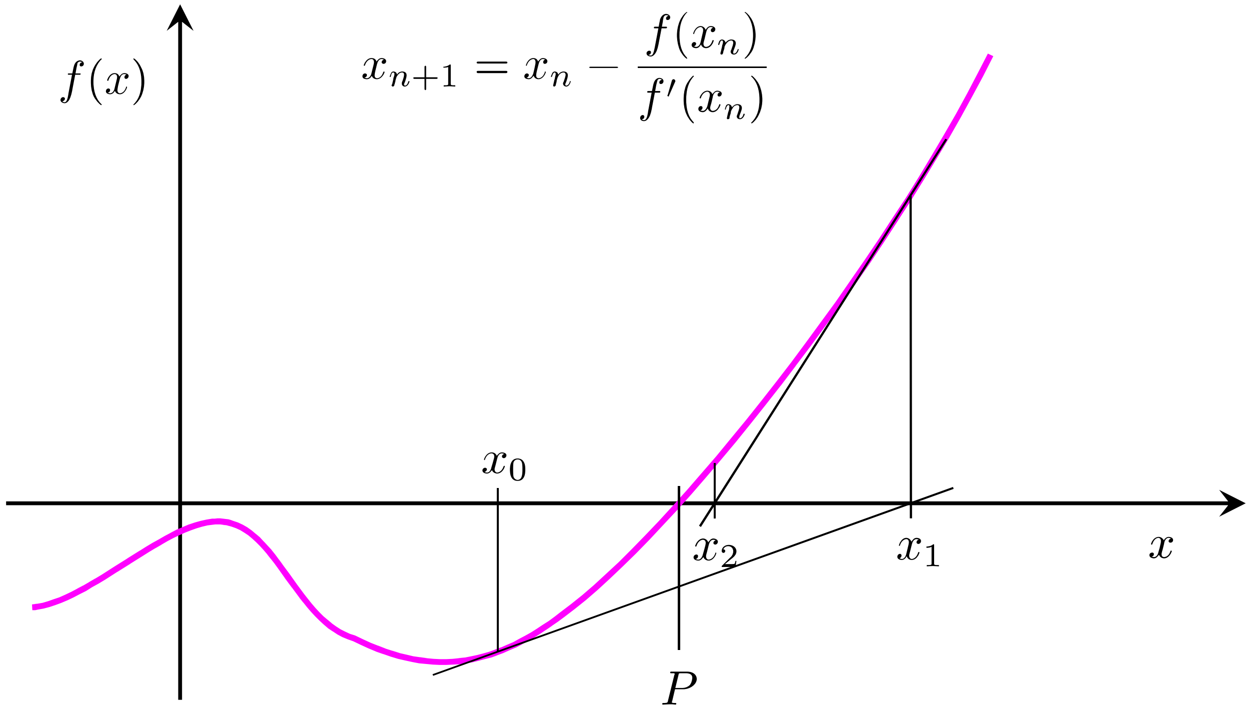
- Regula Falsi: Anstelle des Mittelpunkts des Intervalls $[a, b]$ wird der Schnittpunkt c der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der Abszisse verwendet.

$$c = b - \frac{f(b) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)}$$

- Vorteil der Regula falsi: u. U. schnellere Konvergenz

Ingenieurmathematik
6 Nichtlineare Gleichungen

- Newton-Verfahren



- Allgemeines nichtlineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\
&\vdots \\
f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Ingenieurmathematik

6 Nichtlineare Gleichungen

- Fixpunkt-Iteration (Picard-Verfahren)
  - Überführung in eine Fixpunkt-Form

    $$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

  - Fixpunkt-Iteration

    $$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$$

- Konvergenz, wenn für eine beliebige Norm der Jacobi-Matrix gilt:

$$||\mathbf{G}(\mathbf{x})|| = \left\| \begin{matrix} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}x_N} \\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}g_N}{\mathrm{d}x_N} \end{matrix} \right\| < 1$$

z.B. Frobenius-Norm:

$$||\mathbf{G}(\mathbf{x})||_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}x_k} \right|^2} < 1$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_1 \sin(x_2) &= 0 \\ [x_2 + x_1] \tan(x_2) - 4 &= 0 \end{aligned}$$

- Überführung in Fixpunkt-Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\left[x_2 + x_1 \sin(x_2)\right] \\ x_2 &= \arctan\left(\frac{4}{x_1 + x_2}\right) \end{aligned} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left[x_2 + x_1 \sin(x_2)\right] \\ \arctan\left(\frac{4}{x_1 + x_2}\right) \end{pmatrix}$$

- Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(x_2)}{4} & \frac{1 + x_1 \cos(x_2)}{4} \\ \frac{-4}{(x_1 + x_2)^2 + 16} & \frac{-4}{(x_1 + x_2)^2 + 16} \end{pmatrix}$$

- Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_N} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_N}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}f_N}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_N}{\mathrm{d}x_N} \end{pmatrix}$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_1 \sin(x_2) &= 0 \\ [x_2 + x_1] \tan(x_2) - 4 &= 0 \end{aligned}$$

  - Vektorschreibweise:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - x_1 \sin(x_2) \\ [x_2 + x_1] \tan(x_2) - 4 \end{pmatrix}$$

  - Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 - \sin(x_2) & -1 - x_1 \cos(x_2) \\ \tan(x_2) & \tan(x_2) + [x_2 + x_1] \dfrac{1}{\cos^2(x_2)} \end{pmatrix}$$

- Definition des Differentialquotienten:

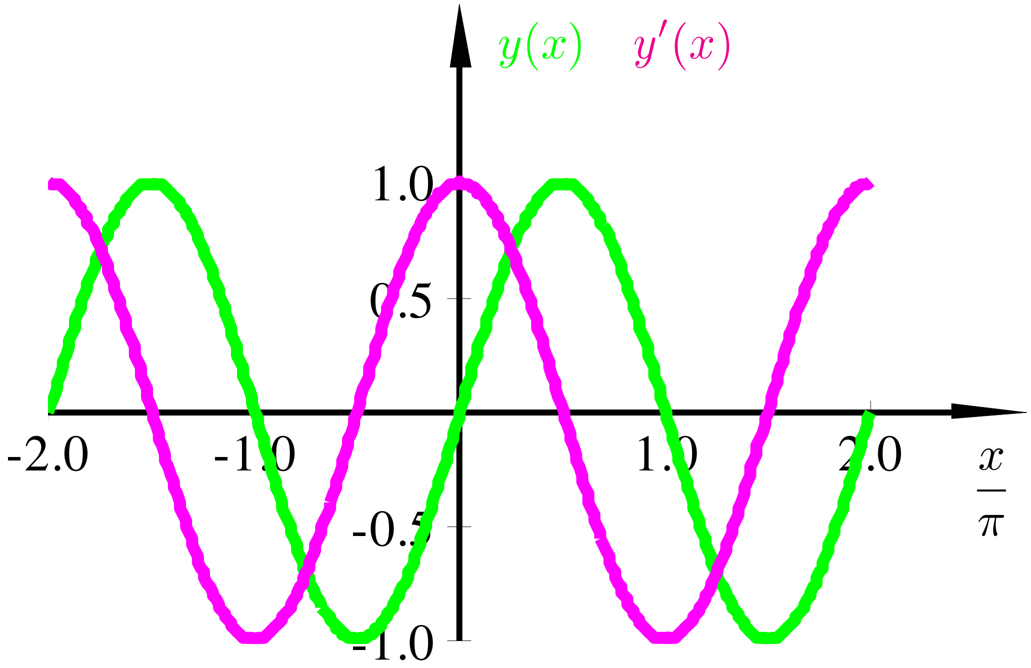
$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Approximation des Differentialquotienten durch den Differenzenkoeffizienten:

$$\hat{f}'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ingenieurmathematik
7 Differentiation

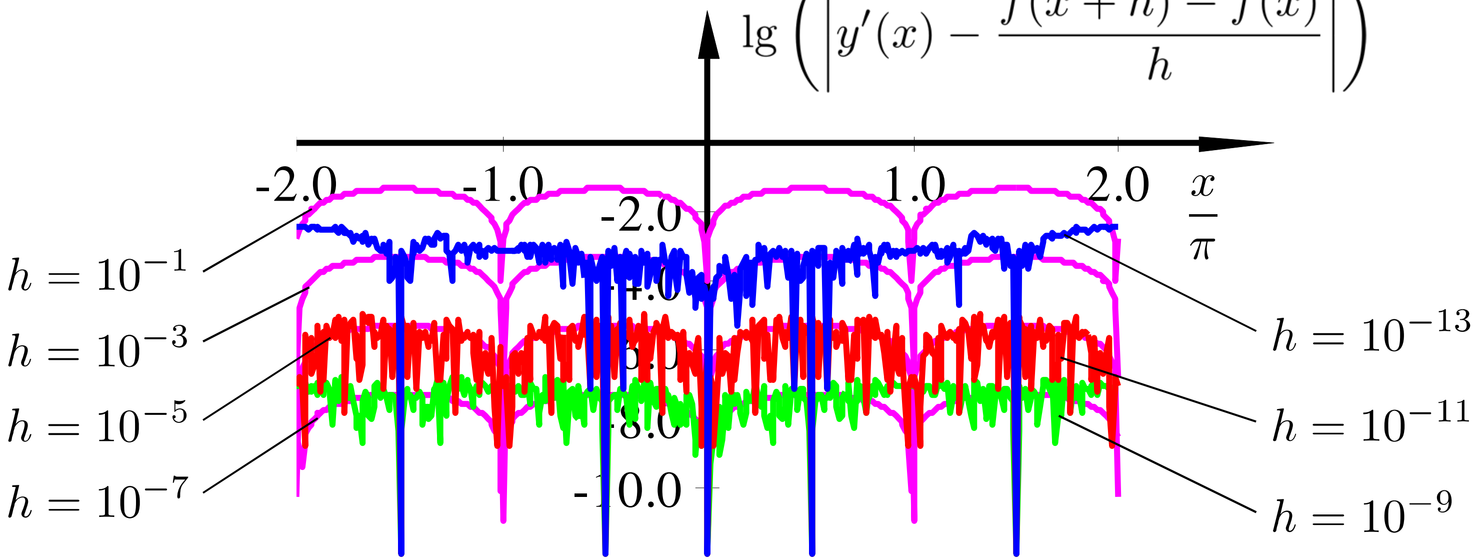
- Beispiel: $y(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \cos(x)$



Ingenieurmathematik

7 Differentiation

- Beispiel: $y(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \cos(x)$



Ingenieurmathematik
7 Differentiation

- Erhöhte Genauigkeit durch symmetrische Approximationsformel

$$\hat{f}'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

  - Abschätzung des Approximationsfehlers:

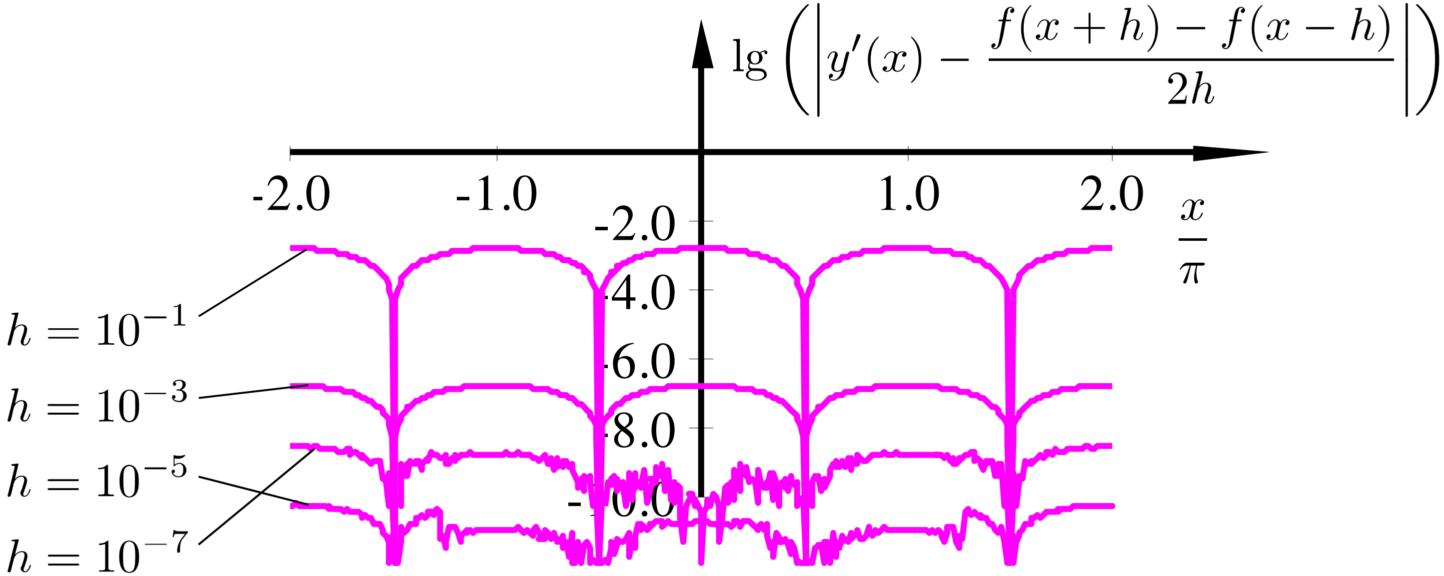
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \cdots$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} - \frac{f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(x_0) \cdot h^2}{3!} + \cdots$$

  - Approximationsfehler: $e_{\text{approx}} = \hat{f}'(x_0) - f'(x_0) = \dfrac{f'''(x_0) \cdot h^2}{3!} + \cdots = \mathrm{O}(h^2)$

- Beispiel: $y(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \cos(x)$



Ingenieurmathematik
7 Differentiation

- Approximationsformel mit Fehler der Ordnung $\mathrm{O}(h^4)$

$$\hat{f}'(x_0) = \frac{-f(x_0+2h) + 8f(x_0+h) - 8f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{12h}$$

  - Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h \cdot f'(x_0) + \frac{2f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \frac{2f^{(5)}(x_0) \cdot h^5}{5!} + \cdots$$

$$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) = 4h \cdot f'(x_0) + \frac{16f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \frac{64f^{(5)}(x_0) \cdot h^5}{5!} + \cdots$$

$$\hat{f}'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[8\left(2h \cdot f'(x_0) + \frac{2f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \frac{2f^{(5)}(x_0) \cdot h^5}{5!} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \left(4h \cdot f'(x_0) + \frac{16f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \frac{64f^{(5)}(x_0) \cdot h^5}{5!} + \cdots\right)\right]$$

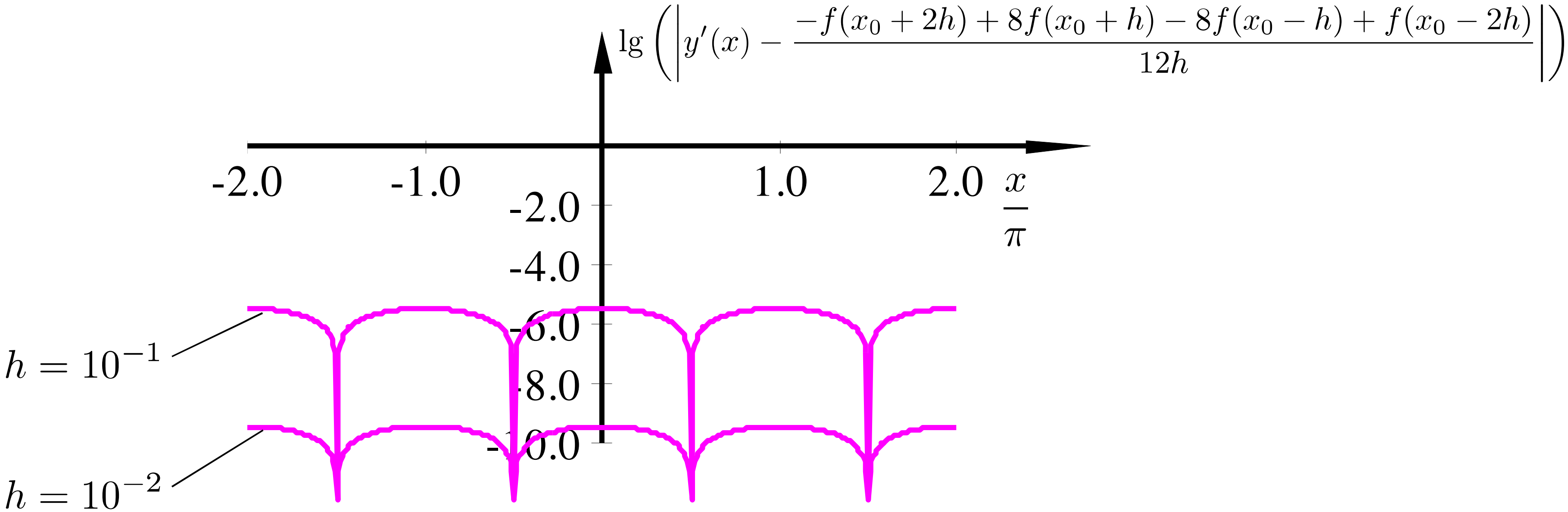
- Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$\hat{f}'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f^{(5)}(x_0) \cdot h^4}{30} + \cdots$$

$$e_{\text{approx}} = \hat{f}'(x_0) - f'(x_0) = -\frac{f^{(5)}(x_0) \cdot h^4}{30} + \cdots = \mathrm{O}(h^4)$$

Ingenieurmathematik
7 Differentiation

- Beispiel: $y(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \cos(x)$



Ingenieurmathematik

7 Differentiation

- Differentiation durch Transformation in den Frequenzbereich
  - Mit $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(\omega)$ ergibt sich:

$$
\begin{array}{ccc}
\dot{f}(t) & = & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \\
\mathcal{F} \Big\downarrow & & \mathcal{F} \Big\downarrow \\
\dot{F}(\omega) & = & F(\omega) \cdot \mathrm{j}\omega
\end{array}
$$

Ingenieurmathematik
8 Integration

- Numerische Integration: Approximation eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q(\mathbf{f}) + e(\mathbf{f})$$

- Abtastwerte der Funktion $f(x)$:

$$\mathbf{f} = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_M))$$

- Quadraturformeln:

$$Q(\mathbf{f}) = \sum_{k=0}^{M} w_k \cdot f(x_k)$$

- Äquidistante Abtastwerte

$$x_k = x_0 + k \cdot h$$

- Newton-Cotes-Quadraturformeln:
  - Trapezformel

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

  - Simpsonformel

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)\right]$$

  - Simpsons 3/8-Formel

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3 \cdot f(x_1) + 3 \cdot f(x_2) + f(x_3)\right]$$

- Boolsche Formel

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{2h}{45}\left[7\cdot f(x_0) + 32\cdot f(x_1) + 12\cdot f(x_2) + 32\cdot f(x_3) + 7\cdot f(x_4)\right]$$

- Genauigkeit der Newton-Cotes-Quadraturformeln:
  - Entwurf der Newton-Cotes-Quadraturformeln so, dass Polynome des Grads n exakt integriert werden.
  - Trapezformel (Grad $n = 1$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(c)$$

  - Simpsonformel (Grad $n = 2$)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

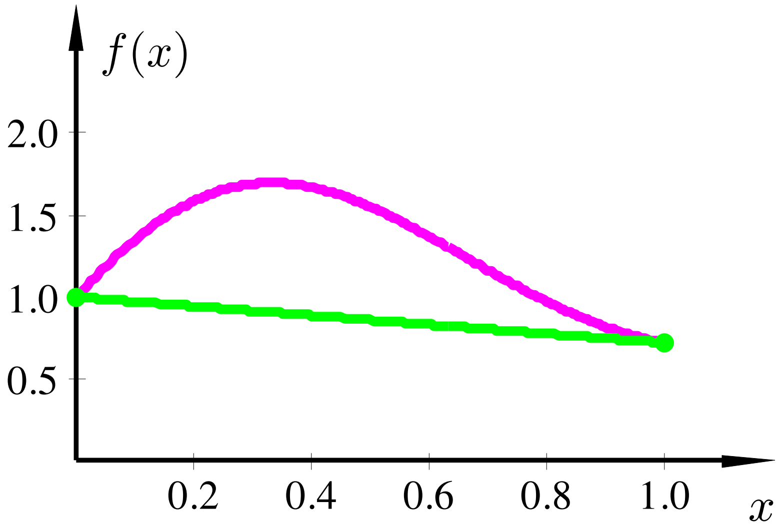
- Simpsons 3/8-Formel (Grad $n = 3$)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\cdot f(x_1) + 3\cdot f(x_2) + f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(c)$$

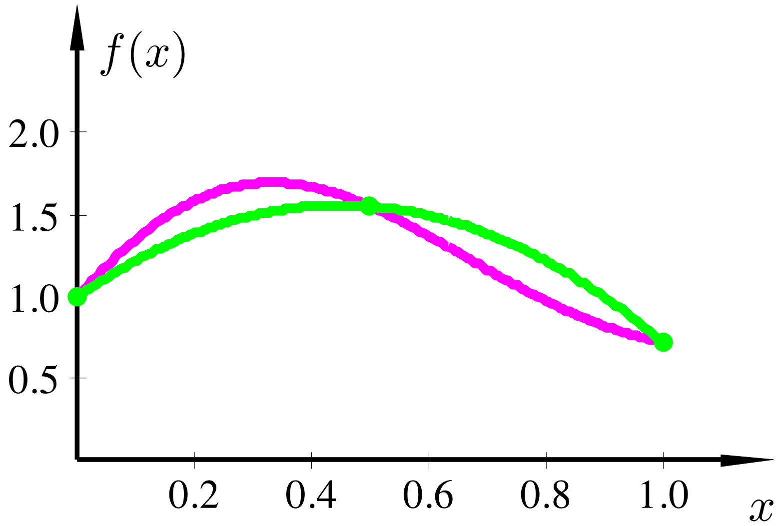
- Boolsche Formel (Grad $n = 4$)

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right] \\ &\quad - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(c)\end{aligned}$$

- Beispiel: Integration der Funktion $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(4x)$
  - Trapezformel (Grad $n = 1$), Simpsonformel (Grad $n = 2$)

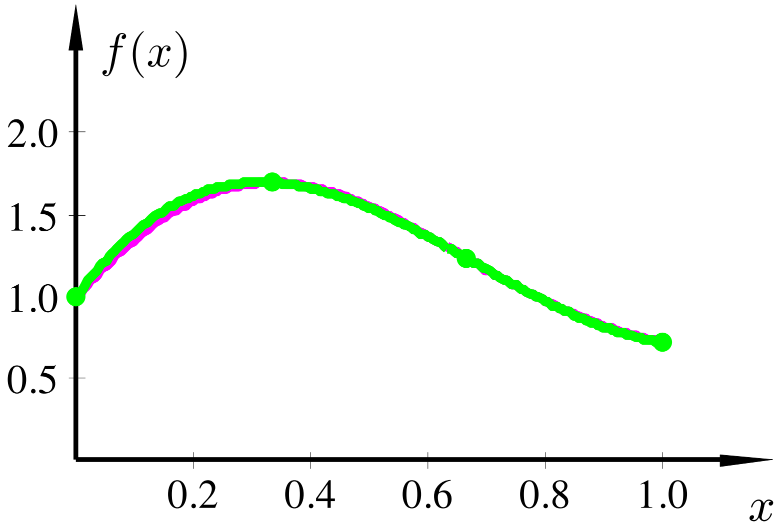


$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0,86079$$

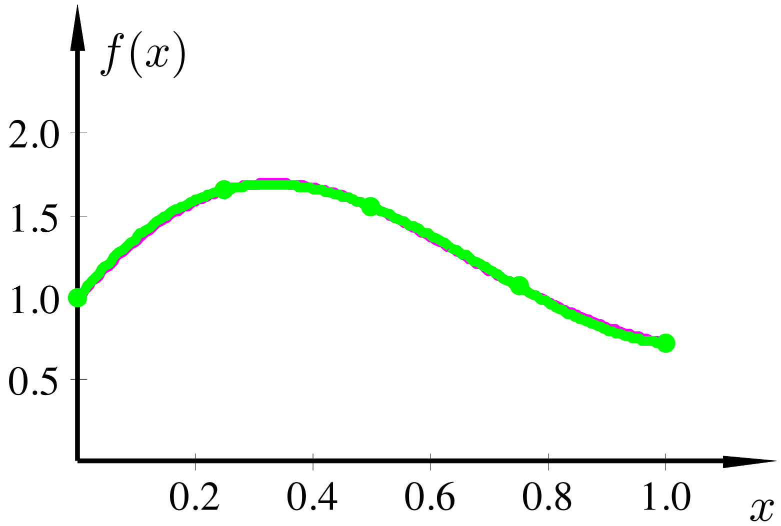


$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,32128$$

- Beispiel: Integration der Funktion $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,3082506\ldots$
  - Simpsons 3/8-Regel (Grad $n = 3$), Boolesche Formel (Grad $n = 4$)



$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,31440$$



$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,30859$$

- Fairer Vergleich der Verfahren, nur wenn die Zahl von zu berechnenden Funktionswerten gleich ist.
  - Beispiel: 5 Abtastwerte
    - Mehrfachanwendung der Trapezregel:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\approx \frac{h}{2}(f_1 + f_0) + \frac{h}{2}(f_2 + f_1) \\
&\quad + \frac{h}{2}(f_3 + f_2) + \frac{h}{2}(f_4 + f_3) \\
&= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)
\end{aligned}
$$

Ingenieurmathematik

8 Integration

- Mehrfachanwendung der Simpsonregel:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)\end{aligned}$$

Ingenieurmathematik
8 Integration

- Numerische Auswertung:
  - » Mehrfachanwendung der Trapezregel: $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,28358$$
  - » Mehrfachanwendung der Simpsonregel: $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,30938$$
  - » Boolesche Formel: $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,30859$$
  - » Exakte Lösung: $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,30825069\ldots$$

Ingenieurmathematik
9 Differentialgleichungen

- Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung
  - Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$
    $y(x_0) = y_0$
  - Äquidistante Abtastung: $x_i = x_0 + i \cdot h$
  - Numerische Lösung durch Einschrittverfahren
    - Polygonzugverfahren

$$\int_{x_0}^{x} y' \, \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} f(u, y) \, \mathrm{d}u \quad \Longrightarrow \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(u, y) \, \mathrm{d}u$$

- Euler-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

- Verbessertes Euler-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\right)$$

- Heun-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))]$$

- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung
  - Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & \qquad y_1(x_0) &= y_{1,0} \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & \qquad y_2(x_0) &= y_{2,0} \\
\vdots \quad & \quad \vdots & \vdots \quad & \quad \vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & \qquad y_n(x_0) &= y_{n,0}
\end{aligned}
$$

  - Vektorielle Schreibweise

$$
\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \\ f_2\left(x, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{y}' = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right)
$$

$$
\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0
$$

Ingenieurmathematik

9 Differentialgleichungen

- Äquidistante Abtastung: $x_k = x_0 + k \cdot h$
- Numerische Lösung durch Einschrittverfahren
  - Polygonzugverfahren

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{y}' \, \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}\left(u, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \, \mathrm{d}u \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{y}(x) = \mathbf{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}\left(u, \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right) \, \mathrm{d}u$$

  - Euler-Verfahren

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}\left(x_i, \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}\right)$$

  - ….

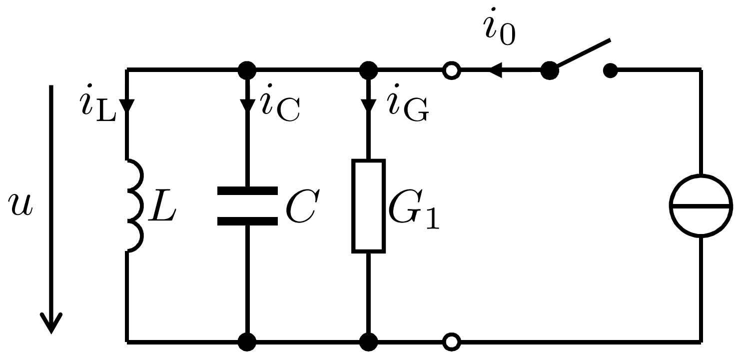
- Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

  - Umformen in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung
  - Substitution: $\quad y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

- Beispiel: Van-der-Pol-Oszillator
  - Gedämpfter Schwingkreis



$$u = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t}$$

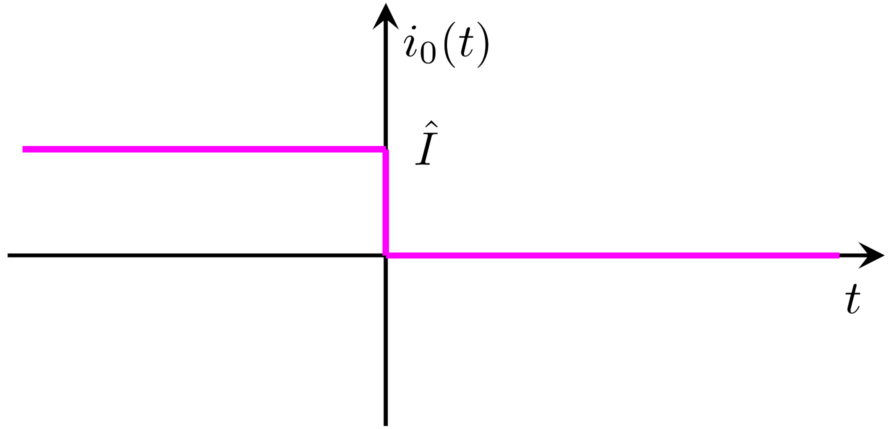
$$i_\mathrm{C} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$i_\mathrm{G} = G_1 \cdot u$$

$$C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + G_1 \cdot u + \int \frac{u}{L} \mathrm{d}\tau = i_0$$

$$C \cdot \ddot{u} + G_1 \cdot \dot{u} + \frac{u}{L} = \dot{i}_0$$

- Anregung



$$C \cdot \ddot{u} + G_1 \cdot \dot{u} + \frac{u}{L} = \dot{i}_0 = -\hat{I} \cdot \delta(t)$$

- Laplace-Transformation: $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} U(p)$

$$C \cdot p^2 \cdot U + G_1 \cdot p \cdot U + \frac{U}{L} = -\hat{I}$$

$$U \cdot \left(C \cdot p^2 + G_1 \cdot p + \frac{1}{L}\right) = -\hat{I}$$

- Laplace-Transformierte:

$$U = \frac{-\hat{I}}{C} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{G_1}{C} \cdot p + \frac{1}{LC}}$$

$$= \frac{-\hat{I}}{C} \cdot \frac{1}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)} = \frac{-\hat{I}}{C} \cdot \left(\frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} \right)$$

- Partialbruchzerlegung:

$$p_{1/2} = -\frac{G_1}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G_1}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} = \frac{1}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)} \implies A = \frac{1}{p_1 - p_2} \quad B = \frac{-1}{p_1-p_2}$$

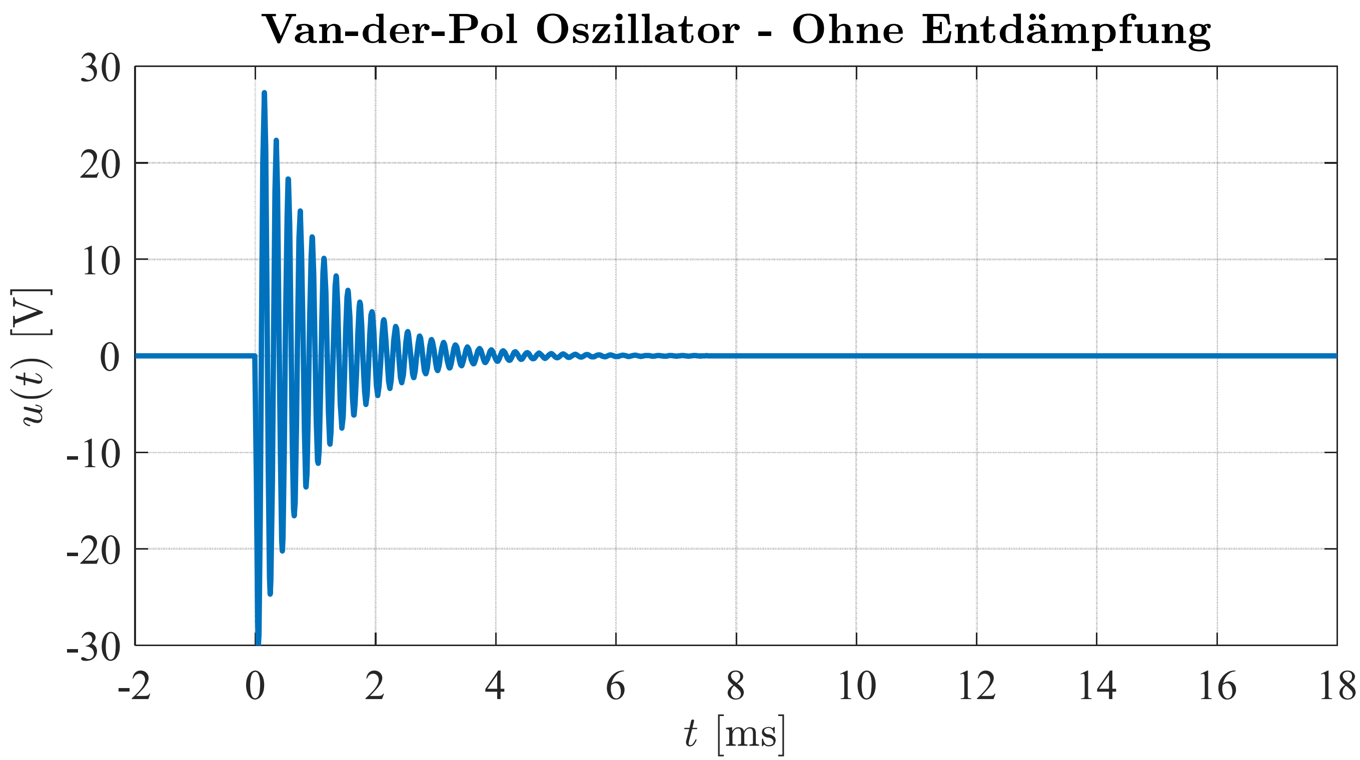
- Laplace-Transformierte:

$$U = \frac{-\hat{I}}{C} \cdot \left(\frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Rücktransformation:

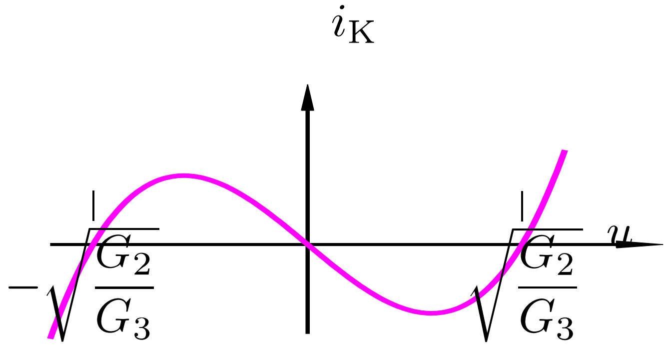
$$u(t) = \frac{-\hat{I}}{C} \cdot \left(\frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \mathrm{e}^{p_1 t} - \frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \mathrm{e}^{p_2 t} \right) \cdot \mathrm{s}(t)$$

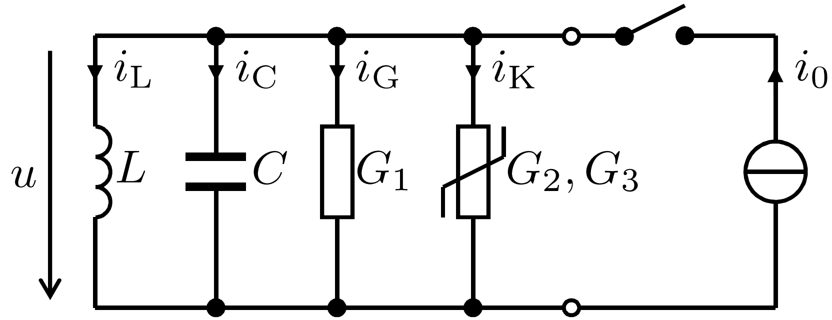
- Zahlenwerte: $L = 1$ mH $\quad C = 1\ \mu$F $\quad G_1 = 2$ mS $\quad \hat{I} = 1$ A



- Nichtlineare Entdämpfung

$$i_{\mathrm{K}} = -G_2 \cdot u + G_3 \cdot u^3$$





$$C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + G_1 \cdot u - G_2 \cdot u + G_3 \cdot u^3 + \int \frac{u}{L} \mathrm{d}\tau = i_0$$

- Van-der-Pol-Dgl.: $C \cdot \ddot{u} + \left(G_1 - G_2 + 3 \cdot G_3 \cdot u^2\right) \cdot \dot{u} + \frac{u}{L} = \dot{i}_0$

Ingenieurmathematik
9 Differentialgleichungen

- Substitutionen

$$u_1 = u \qquad u_2 = \dot{u}$$

- Äquivalentes Diffentialgleichungssystem

$$\dot{u_1} = u_2$$

$$\dot{u_2} = -\frac{1}{C} \cdot \left(G_1 - G_2 + 3 \cdot G_3 \cdot u_1^2\right) \cdot u_2 - \frac{u_1}{LC} + \frac{\dot{i_0}}{C}$$

- Implementierung: Abtastfrequenz und Abtastzeitpunkte

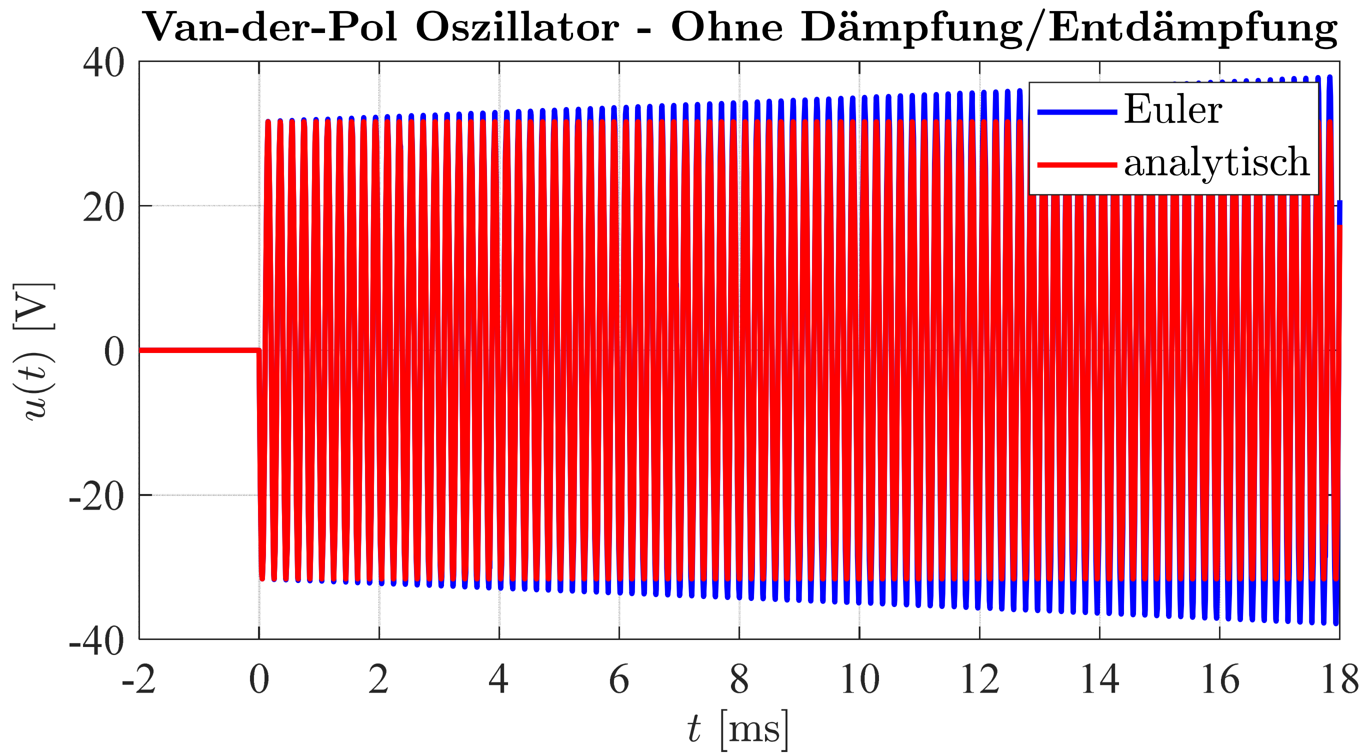
$$f_{\mathrm{a}} = \frac{1}{h} \qquad t_k = T_0 + k \cdot h$$

- Euler-Verfahren:

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_k + h \cdot \mathbf{f}\left(t_k, \hat{\mathbf{u}}_k^{\mathrm{T}}\right) \qquad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{u}}_k = \begin{pmatrix} \hat{u}_1\left(t_k\right) = \hat{u}\left(t_k\right) \\ \hat{u}_2\left(t_k\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}\left(t_k, \hat{\mathbf{u}}_k^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} \hat{u}_2\left(t_k\right) \\ -\frac{1}{C} \cdot \left(G_1 - G_2 + 3 \cdot G_3 \cdot \left[\hat{u}_1\left(t_k\right)\right]^2\right) \cdot \hat{u}_2\left(t_k\right) - \frac{\hat{u}_1\left(t_k\right)}{LC} + \frac{\dot{i}_0(t_k)}{C} \end{pmatrix}$$

- Beispiel für $G_1 = G_2 = G_3 = 0,\, f_\mathrm{a} = \dfrac{1}{h} = 50\ \mathrm{MHz},\, N = 1\ \mathrm{MSamples}$



Ingenieurmathematik
9 Differentialgleichungen

- Approximationsfehler

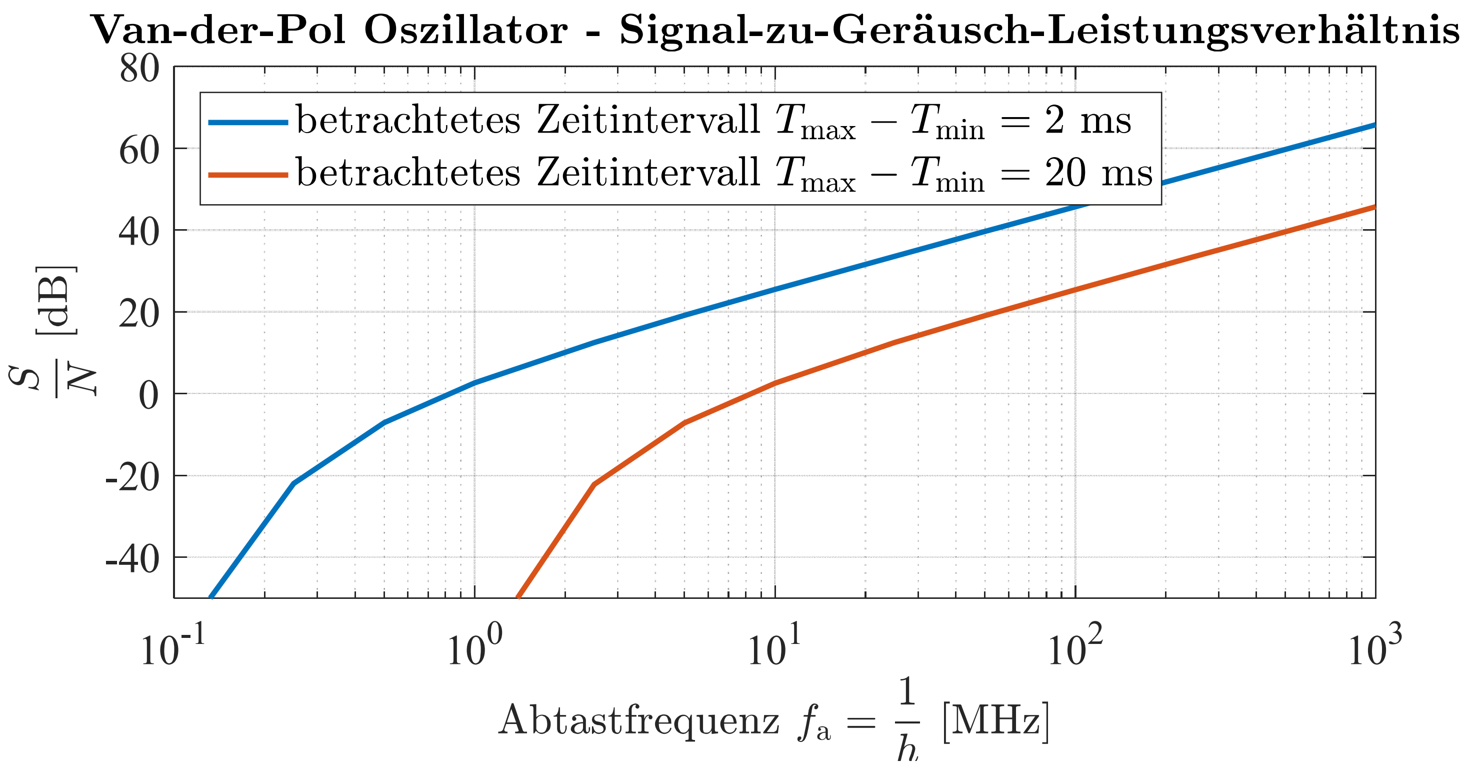
$$e(t_k) = \hat{u}(t_k) - u(t_k)$$

- Signal-zu-Geräusch-Leistungsverhältnis

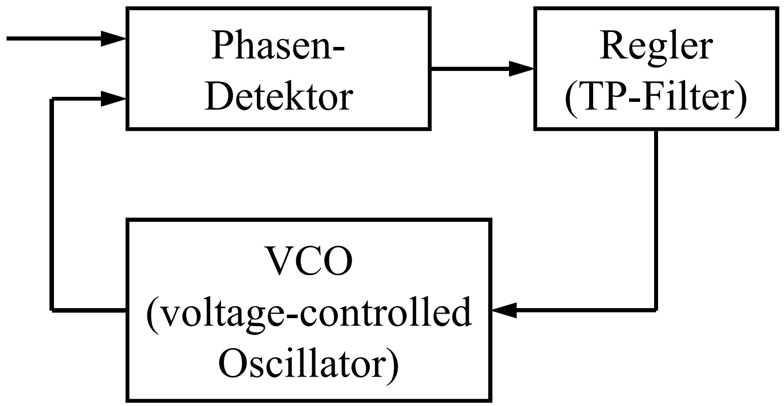
$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[u(t_k)]^2}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[e(t_k)]^2} = g(h, N)$$

Ingenieurmathematik
9 Differentialgleichungen

- Beispiel für $G_1 = G_2 = G_3 = 0$

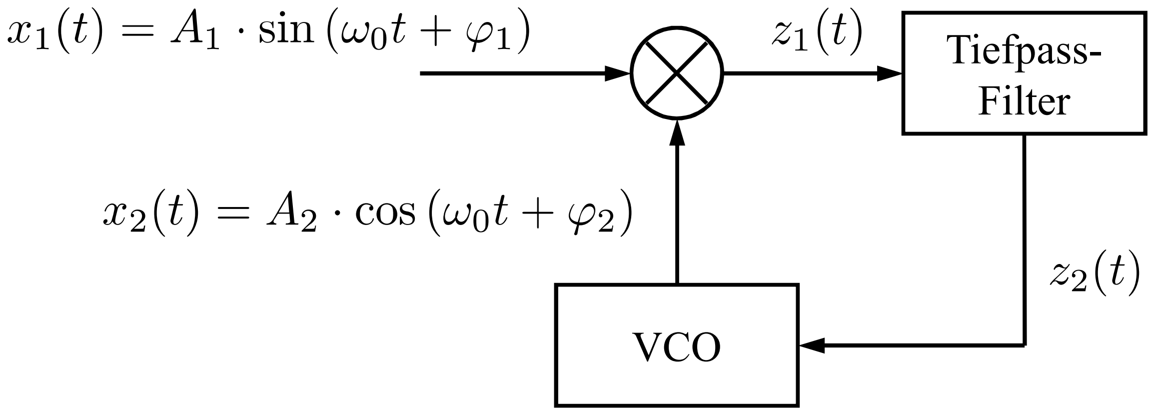


- Phasenregelkreis (phase-locked loop – PLL)
  - Prinzipschaltbild



Ingenieurmathematik
9 Differentialgleichungen

- Analoger Phasenregelkreis
  - Multiplizierer und Tiefpass wirken als nichtlinearer Phasendetektor



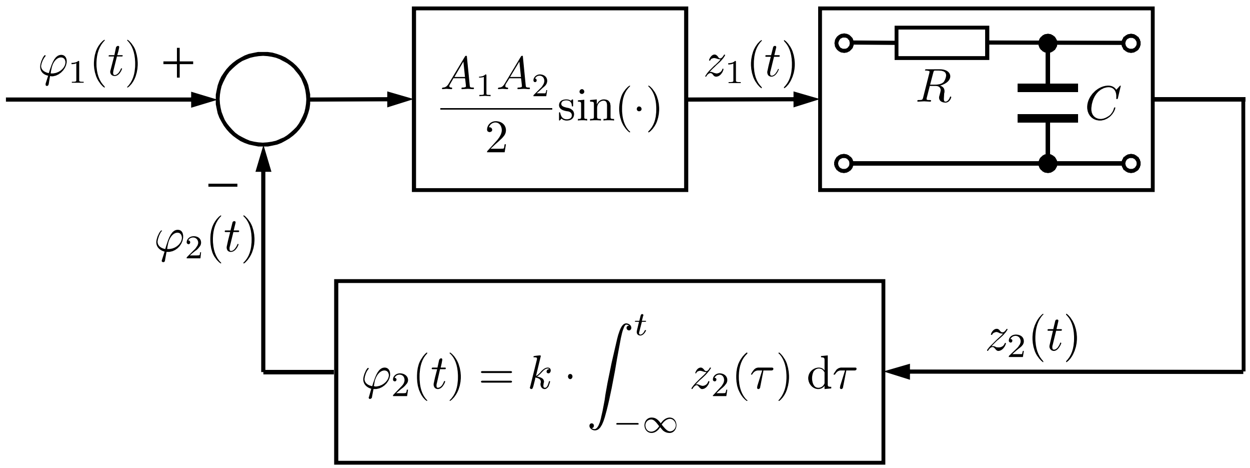
$$z_1(t) = A_1 A_2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$= \frac{A_1 A_2}{2} \cdot [\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

- VCO-Momentanfrequenz: $\omega_2(t) = \omega_0 + k \cdot z_2(t)$
- VCO-Ausgangssignal:

$$x_2(t) = A_2 \cdot \cos\left(\omega_0 t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} z_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

- Blockschaltbild für die Phase:



Ingenieurmathematik

9 Differentialgleichungen

- Dgl. des Tiefpassfilters: $RC \cdot \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = z_1 - z_2$
- Dgl. des VCO: $\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = k \cdot z_2$
- Phasendetektor: $z_1 = \frac{A_1 A_2}{2} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$
- Dgl.-System:

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\left[\frac{A_1 A_2}{2} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - z_2\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = k \cdot z_2$$

- Beispiel für ein Eingangssignal: harmonisch frequenzmoduliertes Signal

  $$\omega_1(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot \cos\left(\omega_\mathrm{S} t\right)$$

  $$x_1(t) = A_1 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\omega_\mathrm{S}} \cdot \sin\left(\omega_\mathrm{S} t\right)\right)$$

  $$\varphi_1(t) = \frac{\Delta\omega}{\omega_\mathrm{S}} \cdot \sin\left(\omega_\mathrm{S} t\right)$$

- Halte-Frequenzbereich: $\Delta\omega_\mathrm{H} = \dfrac{A_1 A_2}{2} \cdot k$

- Anwendung des PLL als Frequenzdemodulator