Aufgaben zur Klausur:

Computergestützte Ingenieurmathematik

Name: ____________________ Matrikelnummer: ____________________

Wichtige Hinweise:

- Die Dauer der Klausur beträgt 90 Minuten.
- **Falls nicht anders vorgegeben, sind sämtliche Skizzen unter Angabe aller wesentlichen Abszissen- und Ordinatenwerte anzufertigen**.

Aufgabe 1: Grundlagen (9 Punkte)

Die folgenden Unteraufgaben können **unabhängig voneinander** gelöst werden.

—————— Aufgabenteil a) ——————

1.1 (7 Punkte)

a) Weisen Sie der Variablen g den Wert $\frac{1}{4}$ mit Hilfe eines Matlab-Befehls zu.

b) Definieren Sie mit Hilfe eines Matlab-Befehls einen Zeilenvektor $\mathbf{z}$ mit den Werten -1 und $+1$.

c) Geben Sie das Ergebnis des Matlab-Befehls an: `A = zeros(3,2) + 1`

d) Geben Sie das Ergebnis des Matlab-Befehls an: `b = 1:1:3`

e) Geben Sie das Ergebnis des Matlab-Befehls an: `C = [ 1 2 ; 3 4 ]`

f) Geben Sie das Ergebnis des Matlab-Befehls an: `d = b.^2`

g) Geben Sie das Ergebnis des Matlab-Befehls an: `E = A * A'`

—————— Aufgabenteil b) ——————

1.2 (2 Punkte)

Markieren und korrigieren Sie **in der Aufgabenstellung** alle Fehler in der Schreibweise (DIN 1338) für die folgende Formel. Die Formel beschreibt die Momentanamplitude einer harmonischen Schwingung.

Hinweis: Nutzen Sie die folgenden Abkürzungen:
f = fett, n = normal (nicht-fett) sowie g=gerade, k=kursiv.

$$x(\mathrm{t}) = A_{\mathit{0}} \cdot \mathit{cos}\left(\omega_0 \cdot t\right) = A_0 \cdot \mathrm{Re}\left\{\mathbf{e}^{\mathrm{j}\omega_0 \cdot t}\right\}$$

Aufgabe 2: Lineare Gleichungen (14 Punkte)

Die folgenden Aufgabenteile können **unabhängig voneinander** gelöst werden.

AUFGABENTEIL A)

Gegeben ist die Matrix **A** mit:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} .$$

2.1 (2 Punkte)

Führen Sie eine LU-Zerlegung der Matrix **A** gemäß

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

durch, indem Sie die Matrizen **L** und **U** bestimmen.

AUFGABENTEIL B)

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Die LU-Zerlegung der Matrix **A** ergibt die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

2.2 (4 Punkte)

Lösen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der LU-Zerlegung.

AUFGABENTEIL C)

Gegeben sind die folgenden Gleichungssysteme mit den Unbekannten x_i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \tag{c}$$

2.3 (3 Punkte)

Geben Sie jeweils die Anzahl von Lösungen an. (Begründung erforderlich!)

Fortgesetzt auf der nächsten Seite!

Aufgabenteil d)

Gegeben ist die Matrix $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 14 & -9 \\ 1 & 16 & -10 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{B}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und λ_3.

2.4 (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Eigenwert λ_3.

2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie den zu λ_1 zugehörigen Eigenvektor

$$\mathbf{v}_1 = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ v_{1,3} \end{pmatrix},$$

wobei k eine beliebige Konstante ungleich Null ist.

2.6 (1 Punkt)

Mit welchem Matlab-Befehl können die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnet werden?
Geben Sie die hierfür benötigte Matlab-Syntax für die Matrix $\mathbf{B}$ an.

Aufgabe 3: Nichtlineare Gleichungen (10 Punkte)

Die folgenden Unteraufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

AUFGABENTEIL A)

3.1 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes Polynom:

$$p(x) = 5x^3 + x^2 - 3x + 1$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(x)$ mit Hilfe einer Polynomdivision.
Hinweis: Eine Nullstelle von $p(x)$ ist $x_0 = -1$.

b) Geben Sie den MATLAB-Befehl an, mit dem die Nullstellen von $p(x)$ bestimmt werden können.

c) Mit welchem MATLAB-Befehl kann das Polynom $p(x)$ (bis auf einen Skalierungsfaktor) aus den Nullstellen hergestellt werden?

AUFGABENTEIL B)

3.2 (6 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen $h(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = \frac{1}{\pi}x$.
Weiterhin ist die folgende nichtlineare Gleichung gegeben:

$$f(x) = h(x) - g(x) = \sin(2x) - \frac{1}{\pi}x = 0$$

a) Zeichnen Sie die Funktionen $h(x)$ und $g(x)$ im Bereich $x \in [-\pi, +\pi]$ in **ein** Diagramm. Geben Sie die wesentlichen Ordinaten- und Abszissenwerte an!

b) Wie viele Nullstellen hat die Funktion $f(x)$?

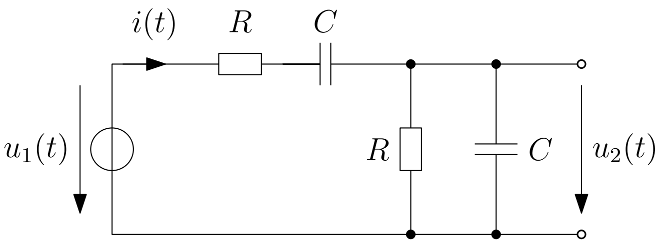
c) In welchem Intervall $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ liegen die Nullstellen näherungsweise?

d) Bestimmen Sie näherungsweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Nullstelle von $f(x)$. Führen Sie 2 Iterationen des Newton-Verfahrens für $f(x) = 0$ durch. Starten Sie mit $x_0 = 2$.

e) Geben Sie 2 MATLAB-Befehle an, die jeweils mindestens eine Nullstelle von $f(x)$ ausgeben.

Aufgabe 4: Differentialgleichungen - Passiver RC-Bandpass (14 Punkte)

Gegeben ist die folgende Schaltung.



4.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Schaltung $H(\omega) = \dfrac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}$ mit $u_i(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} U_i(\omega) \ \forall \ i \in \{1, 2\}$.

4.2 (2 Punkte)

Skizzieren Sie qualitativ $|H(\omega)|$.

Die Spannung $u_2(t)$ wird durch die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung modelliert:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_2(t) = f\left(t, R, C, u_1(t), u_2(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t)\right) .$$

4.3 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Differentialgleichung zur Berechnung der Ausgangsspannung $u_2(t)$.

Zur Lösung einer Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung mit MATLAB ist es notwendig, die DGL ein entsprechendes System von DGLn erster Ordnung zu ersetzen.

4.4 (1 Punkt)

Wandeln Sie die Differentialgleichung zur Berechnung der Ausgangsspannung $u_2(t)$ in ein äquivalentes DGL-System erster Ordnung.

Fortgesetzt auf der nächsten Seite!

4.5 (5 Punkte)

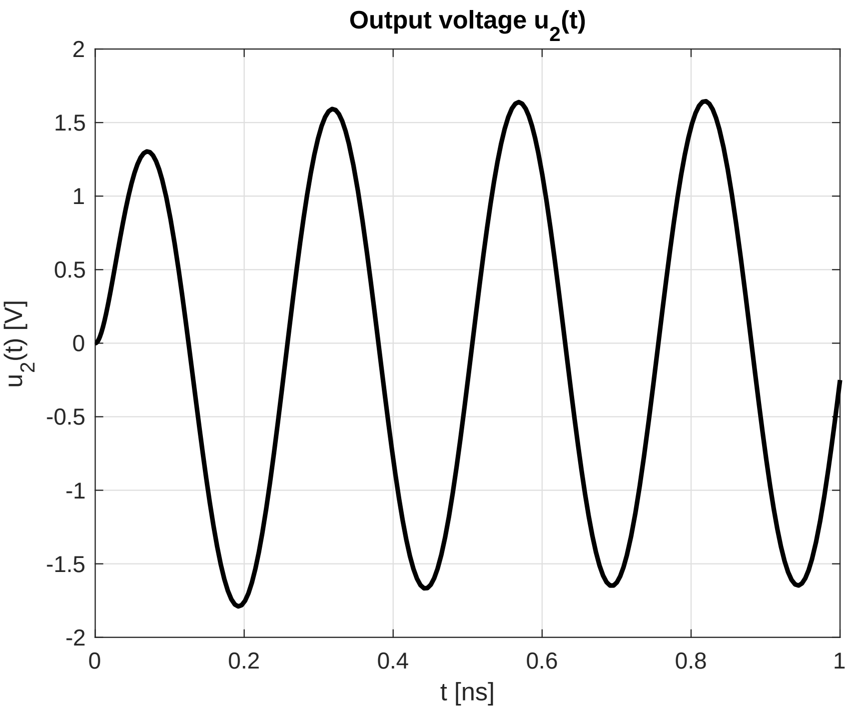
Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die DGL gemäß Aufgabe 4.3 numerisch löst. Das MATLAB-Program soll die Ausgangsspannung $u_2(t)$ berechnen und das unten dargestellte Bild liefern. Verwenden Sie die folgenden Parameter:

$$\begin{aligned} C &= 1\,\mathrm{pF} \\ R &= 50\,\Omega \\ u_1(t) &= 5\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot \mathrm{s}(t), \quad \mathrm{s}(t) \text{ ist die Sprungfunktion} \\ f_0 &= 4\,\mathrm{GHz} \\ 0 \leq t &\leq \frac{4}{f_0} \end{aligned}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u_2(t = 0\,\mathrm{s}) &= 0\,\mathrm{V} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t)\Big|_{t=0\,\mathrm{s}} &= 0\,\mathrm{Vs}^{-1} \end{aligned}$$

Benutzen Sie den MATLAB-Befehl `ode45`. Berücksichtigen Sie vier Zeitperioden der Spannung $u_1(t)$.



empty page

Lösung Aufgabe 1:

Zu Aufg. 1.1

a)
```
>> g = 0.25

g =

    0.2500
```

b)
```
>> z = [-1 +1]

z =

     -1     1
```

c)
```
>> A = zeros(3,2) + 1

A =

     1     1
     1     1
     1     1
```

d)
```
>> b = 1:1:3

b =

     1     2     3
```

e)
```
>> C = [ 1 2 ; 3 4 ]

C =

     1     2
     3     4
```

f)
```
>> d = b.^2

d =

     1     4     9
```

g)
```
>> E = A * A'

E =

     2     2     2
     2     2     2
     2     2     2
```

Zu Aufg. 1.2

$$x(\underset{\text{n,k}}{\mathrm{t}}) = \underset{\text{n,g}}{A_{\mathit{0}}} \cdot cos\,(\underset{\text{n,g}}{\omega_0} \cdot t) = A_0 \cdot \mathrm{Re}\left\{\overset{\text{n,g}}{\mathbf{e}}^{\mathrm{j}\,\omega_0 \cdot t}\right\}$$

Lösung Aufgabe 2:

Zu Aufg. 2.1

Rechnung:

$$\begin{aligned}
1 \cdot u_{11} &= -1 \Rightarrow\ u_{11} = -1 \\
l_{21} \cdot u_{11} &= -2 \Rightarrow\ l_{21} = 2 \\
1 \cdot u_{12} &= 2 \Rightarrow\ u_{12} = 2 \\
l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} &= 7 \Rightarrow\ u_{22} = 7 - 2 \cdot 2 = 3
\end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Zu Aufg. 2.2

Mit der LU-Zerlegung gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

<u>1. Schritt:</u>

Zunächst wird das Gleichungssystem $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ gelöst:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt:</u>

Anschließend wird das Gleichungssystem $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ gelöst:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu Aufg. 2.3

(a) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 1 \neq \text{Rang}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \Rightarrow$ keine Lösung

(b) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \Rightarrow 1$ Lösung

(c) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 1 = \text{Rang}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

Zu Aufg. 2.4

Bestimmung des Eigenwerts:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ 1 & 14-\lambda & -9 \\ 1 & 16 & -10-\lambda \end{vmatrix} =& \det(\mathbf{B}) \\
=&(2-\lambda)\left((14-\lambda)(-10-\lambda)\right)- \\
&4\cdot(1\cdot(-10-\lambda)-1\cdot(-9))+ \\
&(-3)\cdot(1\cdot 16-1\cdot(14-\lambda)) \\
=&\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 \\
=&(\lambda-2)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-\lambda_3)
\end{aligned}$$

Durch alleiniges Betrachten des konstanten Anteils lässt sich $\lambda_3 = 1$ schlussfolgern.

Alternative Lösung über die Spur der Matrix $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{trace}(\mathbf{B}) = \sum_n b_{nn} = 2+14-10 = 6 = \sum_n \lambda_n = 5+\lambda_3 \longrightarrow \lambda_3 = 1$$

Zu Aufg. 2.5

Bestimmung des Eigenvektors:

Es gilt für λ_1:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}_1 = 2\cdot\mathbf{v}_1$$

Also ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 4 & -3 \\ 1 & 14-2 & -9 \\ 1 & 16 & -10-2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 12 & -9 \\ 1 & 16 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ v_{1,3} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Daher gilt $v_{1,3} = 4$ und damit:

$$\mathbf{v}_1 = k\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufg. 2.6

```
[V,D]=eig(B)
```

Lösung Aufgabe 3 (10 Punkte):

Zu Aufg. 3.1 (4 Punkte)

a)
$$
\begin{array}{l}
\left(\quad 5x^3 \quad + x^2 - 3x + 1\right) : \left(x+1\right) = 5x^2 - 4x + 1 \\
\underline{-5x^3 - 5x^2} \\
\qquad -4x^2 - 3x \\
\qquad \underline{\;\; 4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-x - 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

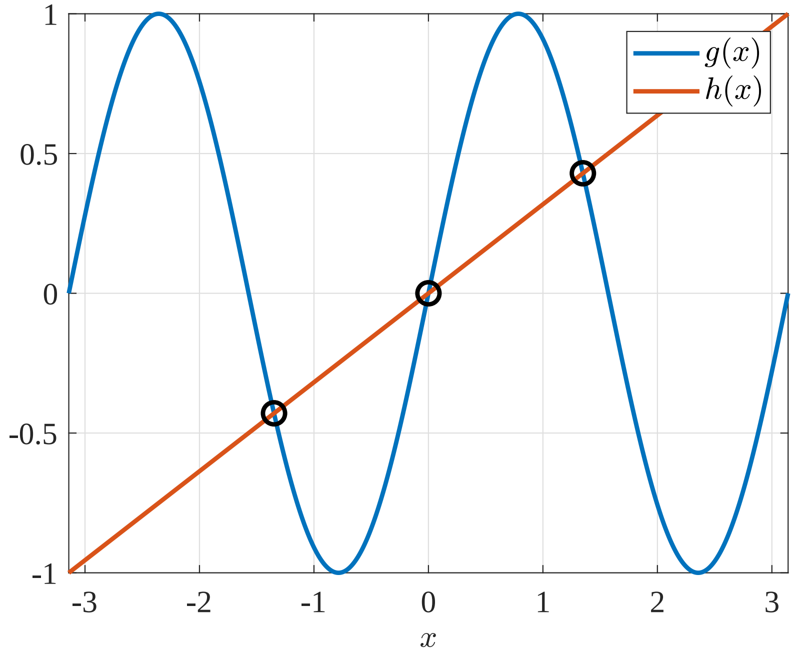
$$
\begin{aligned}
5x^2 - 4x + 1 &= 0 \\
x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} &= 0 \\
\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} + \frac{1}{5} &= 0 \\
x &= \pm\sqrt{-\frac{1}{25}} + \frac{2}{5} \\
x &= \pm\frac{1}{5}\mathrm{j} + \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Nullstellen: $x_0 = -1$; $x_1 = \frac{1}{5}\mathrm{j} + \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5}\mathrm{j} + \frac{2}{5}$.

b)
```
p = [ 5 1 -3 1]
r = roots(p).
```

c) `poly(r).`

Zu Aufg. 3.2 (6 Punkte)



a)

b) Die Nullstellen von $f(x)$ sind die Schnittpunkte von $h(x)$ und $g(x)$. $f(x)$ hat 3 Nullstellen (siehe Bild unter Punkt a).

c) Die Schnittpunkte von $h(x)$ und $g(x)$ liegen näherungsweise zwischen -1.5 und 1.5.

d) (a)

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{\sin(2x_n) - \frac{1}{\pi}x_n}{2\cos(2x_n) - \frac{1}{\pi}} \\
&= \frac{x_n \cdot 2\cos(2x_n) - \frac{1}{\pi}x_n - \sin(2x_n) + \frac{1}{\pi}x_n}{2\cos(2x_n) - \frac{1}{\pi}} \\
&= \frac{2x_n \cdot \cos(2x_n) - \sin(2x_n)}{2\cos(2x_n) - \frac{1}{\pi}} \\
&= \frac{N}{D}
\end{aligned}$$

n	x_n	N	D	x_{n+1}
0	2	-1.8578	-1.6256	1.1428
1	1.1428	-2.2534	-1.6293	1.3831

e) 1. `fzero(@(x) sin(2*x)-x/pi, 2)`
2. `syms x`

```
solve(sin(2*x)-x/pi)
```

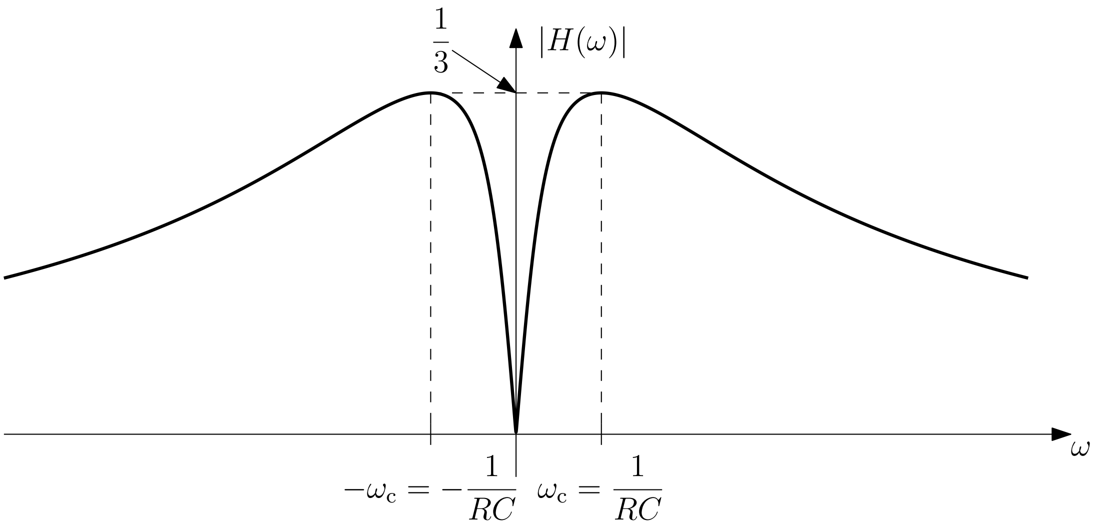
Lösung Problem 4 (14 Punkte):

Zu Aufgabe 4.1 (3 Punkte)

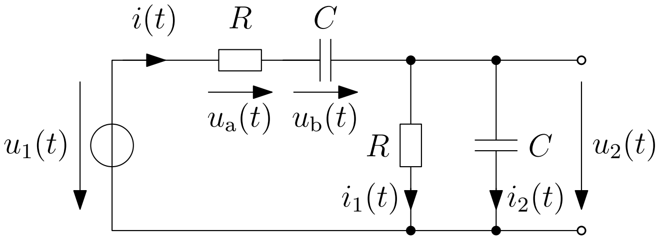
$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \frac{\dfrac{R\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}{\dfrac{R\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \frac{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega RC+1}}{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega RC+1}+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \frac{R}{R+(\mathrm{j}\omega RC+1)\cdot R+\dfrac{\mathrm{j}\omega RC+1}{\mathrm{j}\omega C}} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC+(\mathrm{j}\omega RC+R)\cdot(\mathrm{j}\omega C)+\mathrm{j}\omega RC+1} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC-(\omega RC)^2+\mathrm{j}\omega RC+\mathrm{j}\omega RC+1} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1-(\omega RC)^2+\mathrm{j}3\omega RC}
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe 4.2 (2 Punkte)

$$
\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 &= \sqrt{\frac{(\omega RC)^2}{\left(1-(\omega RC)^2\right)^2+(3\omega RC)^2}} \\
\Longrightarrow \quad |H(\omega=0)|^2 &= 0 \\
|H(\omega\to\infty)|^2 &= 0 \\
\left|H\left(\omega=\frac{1}{RC}\right)\right|^2 &= \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$



Zu Aufgabe 4.3 (3 Punkte)



Aufstellen der Maschen- und Kontengleichungen sowie der Strom-Spannungsbeziehungen

$$
\begin{aligned}
&1.\quad u_1 = u_\mathrm{a} + u_\mathrm{b} + u_2 && \mathrm{a.}\quad u_\mathrm{a} = R\cdot i\\
&2.\quad i = i_1 + i_2 && \mathrm{b.}\quad i = C\cdot u_\mathrm{b}'\\
& && \mathrm{c.}\quad u_2 = R\cdot i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{u_2}{R}\\
& && \mathrm{d.}\quad i_2 = C\cdot u_2'
\end{aligned}
$$

Systematische Lösung (Ausdrücken sämtlicher Größen in Abhängigkeit von der gesuchten Größe u_R):

$$\xrightarrow{\mathrm{c,d}\to 2}\quad i = \frac{u_2}{R} + C\cdot u_2' \qquad\qquad \xrightarrow{\to a}\quad u_\mathrm{a} = u_2 + RC\cdot u_2'$$

$$\xrightarrow{\to \mathrm{b}}\quad u_\mathrm{b}' = \frac{i}{C} = \frac{u_2}{RC} + u_2'$$

Da u_b differenziert vorliegt, müssen die übrigen Spannungen ebenfalls differenziert werden:

$$\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{a}}\quad u_\mathrm{a}' = u_2' + RC\cdot u_2''$$

$$
\begin{aligned}
\xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1}\quad u_1' &= u_\mathrm{a}' + u_\mathrm{b}' + u_2' \;=\; u_2' + RC\cdot u_2'' + \frac{u_2}{RC} + u_2' + u_2'\\
&= RC\cdot u_2'' + 3\cdot u_2' + \frac{u_2}{RC}
\end{aligned}
$$

Die DGL ergibt sich durch Auflösen nach der höchsten Ableitung der Zielgröße u_2:

$$\Longrightarrow \qquad u_2'' = \frac{u_1'}{RC} - \frac{3}{RC}\cdot u_2' - \frac{u_2}{R^2C^2}$$

Zu Aufgabe 4.4 (1 Punkt)

$$u_2''(t) = \frac{u_1'(t)}{RC} - \frac{3u_2'(t)}{RC} - \frac{u_2(t)}{(RC)^2}$$

Equivalent first order system:

$$y_1(t) = u_2(t)$$
$$y_2(t) = u_2'(t)$$
$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -\dfrac{3y_2(t)}{RC} - \dfrac{y_1(t)}{(RC)^2} + \dfrac{u_1'(t)}{RC} \end{cases}$$

Zu Aufgabe 4.5 (5 Punkte)

First, the derivative of $u_1(t)$ has to be determined:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t) &= 5\,\mathrm{V}\cdot 2\pi f_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t)\cdot \mathrm{s}(t) + \underbrace{5\,\mathrm{V}\cdot\sin(2\pi f_0 t)\cdot\delta(t)}_{5\,\mathrm{V}\cdot\sin(2\pi f_0\cdot 0)\cdot\delta(t)=0\,\mathrm{V}} \\ &= 5\,\mathrm{V}\cdot 2\pi f_0\cdot\cos(2\pi f_0 t)\cdot \mathrm{s}(t)\end{aligned}$$

Main program

```
close all; clear all; clc;
global C R f0
C  = 1e-12; % F
R  = 50;   % Ohm
f0 = 4e9; % Hz

Tspan = [0 4/f0]; % just four periods of f0
u1_0 = 0; % initial condition,u3(0) = 0
du1_0dt = 0; % initial condition,(d/dt u3(t))_{t=0} = 0
[T,Y] = ode45(@cimf22ag4_b2_Function , Tspan, [u1_0 du1_0dt ]);
figure;
plot(T(:,1)/1e-9, Y(:,1), 'k-','linewidth',2) , grid on
title('Output voltage u_2(t)')
xlabel('t [ns]')
ylabel('u_2(t) [V]')
```

Function called implementing DGL

```
function vdY_dt = cimf22ag4_b2_Function(t,vY)
%
% function vdY_dt = cimf22ag4_b2_Function(t,vY)
%
% Function describing the ODE-system for a passive RC bandpass 2nd order
%
% vY(1) == y1(t) = u2(t)
% vY(2) == y2(t) = d/dt (y1(t)) = d/dt (u2(t))
% vdY_dt(1) == d/dt(y1(t)) [ = d/dt (u2(t)) ]
% vdY_dt(2) == d/dt(y2(t)) [ = -R/L*y2(t)-1/(LC)*y1(t)-R/L*d/dt (u1(t)) ]
%

global C  R  f0
vdY_dt = zeros(2,1);

% slope of the voltage u1(t) [derivation of u1(t) w.r.t. time]
du1dt = 5*2*pi*f0*cos(2*pi*f0*t)*double(t>0);

vdY_dt(1) = vY(2);
vdY_dt(2) = -3*vY(2)/(R*C) -vY(1)/(R*C)^2 + du1dt/(R*C);
```