

# Festkörperelektronik

## Vorlesung 1

Prof. Nils Weimann

IW / Bauelemente der Höchstfrequenzelektronik (BHE)

10.04.2025



## Motivation

- ▶ Transistoren, Halbleiterlaser, Qubits, ... bestehen aus Festkörpern
- ▶ wieso leiten Festkörper elektrischen Strom?
- ▶ wie kann diese Leitfähigkeit geändert werden?
- ▶ wie verhalten sich **Elektronen** im **Festkörper**?
- ▶ Halbleiter
  - ▶ sind überall, zweistellige Wachstumsraten
  - ▶ KI, Elektrifizierung, alternative Energieerzeugung
  - ▶ neue Fabs in Europa
  - ▶ diversifizierte Industrie
  - ▶ vertieftes Know-How bei Endanwendern

## Inhalte

- ▶ Beschreibung von Elektronen im Festkörper
  - ▶ Teilchen / Welle Dualismus
  - ▶ Energie, Impuls, Schrödingergleichung
  - ▶ Bandstruktur, Elektronen und Löcher
- ▶ vom Material zum Bauelement
  - ▶ Dotierung und Grenzflächen
  - ▶ Konzentration und Stromfluss
- ▶ Licht und Elektronen
  - ▶ Absorption und Emission
  - ▶ Halbleiterlaser
  - ▶ Modulatoren
- ▶ Qubits
  - ▶ Josephson-Junction
  - ▶ Quantenpunkte

## Ziele der Vorlesung

- ▶ mikroskopische Beschreibung der Vorgänge im Festkörper
- ▶ Anwendung der Quantenmechanik
- ▶ Grundlagen für weiterführende Veranstaltungen
  - ▶ Elektronische Bauelemente und Schaltungen
  - ▶ Optoelektronik
  - ▶ Quantenkommunikation

## Aufwand

- ▶ eigenständige Vorbereitung  
Vorlesung und Übung 1,5 h pro Woche
- ▶ Teilnahme Vorlesung und Übung 4 h pro Woche
- ▶ Nachbereitung 2,5 h pro Woche
- ▶ wöchentlich: 8 h

## Prüfungsleistung

- ▶ schriftliche Klausur, basierend auf Vorlesungsinhalten und Übungsaufgaben

## Organisation: Übung zur Vorlesung

- ▶ M.Sc. Alexander Poßberg [alexander.possberg@uni-due.de](mailto:alexander.possberg@uni-due.de)  
M.Sc. Pooya Alibeigloo
- ▶ findet statt jeweils am Mo 16:00 – 17:00 Uhr in LB104
- ▶ Übungsaufgaben werden über Moodle bereitgestellt (bitte etwas vorbereiten)
- ▶ Betreute Bearbeitung während der Übung
- ▶ Lösungen sind über Moodle zum Nacharbeiten verfügbar

## Organisation: Tutorium zur Vorlesung

- ▶ M.Sc. Enes Mutlu [enes.mutlu@uni-due.de](mailto:enes.mutlu@uni-due.de)
- ▶ Einteilung in drei Gruppen, nach **Anmeldung über LSF**
- ▶ findet statt am Mo 12:00 – 14:00 Uhr in BC003  
und am Di 12:00 – 14:00 Uhr in BA050 und BB130
- ▶ Übungsaufgaben werden über Moodle bereitgestellt (bitte etwas vorbereiten)
- ▶ Betreute Bearbeitung während der Übung
- ▶ mögliche Abgabe Ihrer Bearbeitung und Korrektur
- ▶ *gute Vorbereitung für die Klausur*

## Organisation: Moodle

- ▶ zentraler Anlaufpunkt
  - ▶ Materialien zur Veranstaltung
  - ▶ Skript
  - ▶ Folien
  - ▶ Übungs- und Tutoriumsaufgaben
- ▶ Kommunikation und Kontakt über Moodle / Email
- ▶ Sprechstunde n.V. per Email

## generell zur Veranstaltung

- ▶ Alle Inhalte werden in der Vorlesung behandelt
- ▶ Fragen können Sie gerne während der Vorlesung stellen!
- ▶ Im Anschluss an die Vorlesung immer Fragestunde
- ▶ eine Vorlesung baut jeweils auf die vorhergehende auf
- ▶ Vor- und Nachbereitung sind erforderlich! ca. 4h/Woche
- ▶ **Wichtig!** Weiterführende Vorlesungen bauen auf den Stoff der FKE auf!
- ▶ Nehmen Sie sich die Zeit, hier alles vollständig zu verstehen (wir helfen gerne dabei)

## Termine

Nr.	Datum	Thema
1	10.04.2025	Einführung
2	17.04.2025	Wellenpaket - Schrödingergleichung - Potentialstufe
3	24.04.2025	Potentialbarriere - Potentialtopf
4	08.05.2025	endliche Barriere - H-Atom - Periodensystem
5	15.05.2025	periodische Potentiale - Bandstruktur - effektive Masse
6	22.05.2025	Leitfähigkeit - Ladusträgerkonzentration - Dotierung
7	05.06.2025	Strom - Beweglichkeit und Geschwindigkeit - Generation und Rekombination
8	12.06.2025	Wechselwirkung mit Licht - Oberfläche und Grenzfläche
9	26.06.2025	MOS - Schottky
10	03.07.2025	pn Diode
11	17.07.2025	Josephson-Kontakt und Klausurvorbereitung

## Studium in besonderen Situationen

Die UDE möchte Studierenden in studienerschwerenden Situationen / bei besonderen Herausforderungen Unterstützung anbieten und hält daher verschiedene Angebote vor:

- ▶ Für Studierende mit einer chronischen Erkrankung und/oder einer Behinderung bietet die UDE eine spezielle Beratung in der Inklusionsberatung des Akademischen
- ▶ Beratungs-Zentrums (ABZ) an, Ansprechpersonen sind Daniela de Wall und Verena Herwig, abz.handicap@uni-due.de
- ▶ Darüber hinaus bieten Studierende mit einer Behinderung/chronischen Erkrankung auch eine Beratung an: bcks@asta-due.org
- ▶ Für Studierende, die spezifische Informationen aufgrund ihrer persönlichen Lebenssituation, benötigen oder studienbezogene Konflikte erleben, bietet die Ombudsstelle für Studierende Beratung: Ansprechperson ist Dr. Marina Metzmacher. ombudsstelle-fuer-studierende@uni-due.de
- ▶ Für Studierende mit Fragen zu Vereinbarkeit von Studium und Familienaufgaben (Kind(er) und Pflege) bietet die Gleichstellungsstelle Beratung an, Ansprechperson ist Kristina Spahn, gleichstellungsbeauftragte@uni-due.de
- ▶ Für Studierende, die Erfahrungen mit (sexueller) Belästigung oder Diskriminierung aufgrund ihres Geschlechts oder ihrer sexuellen Orientierung machen, bietet die studentische Gleichstellungsbeauftragte, Inka Strubbe Beratung an, stud.gleichstellung@uni-due.de

## Studying in special situations

The UDE offers support to students in situations that make studying difficult. Various offers are available:

- ▶ For students with a chronic illness and/or a disability, the UDE offers counseling in the Inclusion Counseling of the Academic Counseling Center (ABZ)  
Contact: Daniela de Wall and Verena Herwig, abz.handicap@uni-due.de.  
In addition, students with a disability/chronic illness also offer counseling: bcks@asta-due.org
- ▶ For students who need specific information due to their personal life situation or who experience study-related conflicts, the Ombuds Office for Students offers advice  
Contact: Dr. Marina Metzmacher, ombudsstelle-fuer-studierende@uni-due.de
- ▶ For students with questions about balancing studies and family responsibilities (child(ren) and care), the Equal Opportunity Office offers counseling  
Contact: Kristina Spahn, gleichstellungsbeauftragte@uni-due.de
- ▶ For students who experience (sexual) harassment or discrimination based on their gender or sexual orientation, the Student Equal Opportunity Officer offers counseling  
Contact: Inka Strubbe, stud.gleichstellung@uni-due.de

## besondere Bedarfe / special needs

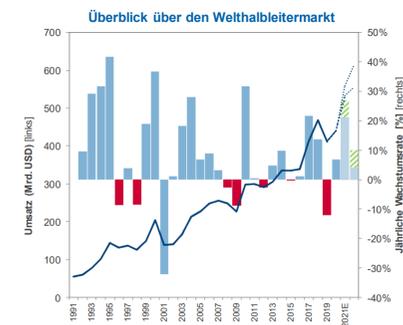
Wenn Sie besondere Bedarfe für die Teilnahme an dieser Veranstaltung haben, wenden Sie sich gerne im Nachgang der heutigen Veranstaltung an mich.

If you have special needs for taking part in this course, please contact me at the end of today's lecture.

## Halbleiter

Schlüsseltechnologie für KI, Digitalisierung,  
Elektrifizierung, Quantentechnologien,  
erneuerbare Energien

## Halbleiter: exponentielles Wachstum

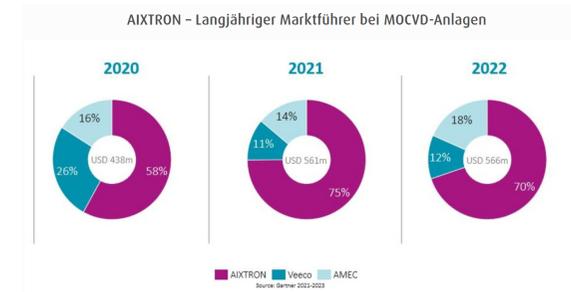


- ▶ globaler Markt heute >600 Mrd e p.a.
- ▶ Europa ca. 10%
- ▶ Moore's Gesetz beschreibt eine Verdopplung der Komplexität von Halbleiterchips alle 18 Monate

## Halbleiter: Wertschöpfung

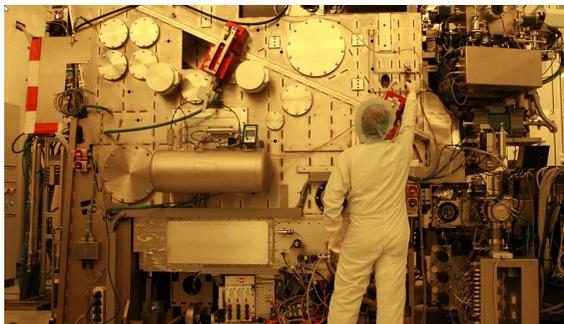
- ▶ Wert der Mikroelektronik pro Kraftfahrzeug im weltweiten Mittel wächst von 120 € im Jahr 1998 über 489 € in 2018 auf 600 € bis 2023 an (Quelle: ZVEI)
- ▶ stärkstes Wachstum in Fahrerassistenzsystemen, Infotainment und bei der Elektrifizierung des Antriebs
- ▶ Halbleiter sorgen für rund 80 Prozent der Innovationen in neuen Fahrzeugen: Antriebsstrang, Cockpit, Infotainment, Fahrerassistenz- und Sicherheitssysteme
- ▶ *jedes weltweit neu ausgelieferte Auto* hatte durchschnittlich 17 Chips der Fa. Bosch im Jahr 2019 an Bord

## Halbleiter: Anlagenbau



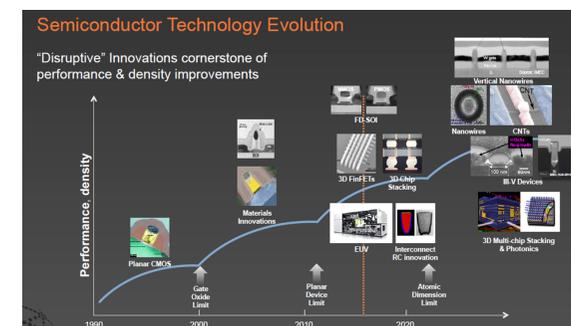
- ▶ Epitaxie: Synthese von Halbleitern
- ▶ Material für LED, HF, next generation CMOS

## Halbleiter: Anlagenbau



- ▶ Lithographie: Kern der Chipherstellung
- ▶ EUV-Stepper (ASML, Trumpf, Zeiss)

## Halbleiter: Technologie-Entwicklung



- ▶ Strukturgrößen im Nanometerbereich (10 Atom-Durchmesser)
- ▶ 100 Mrd. Transistoren auf einem Chip
- ▶ heterogene Integration

## FKE: Gliederung der Vorlesung

- ▶ Grundlagen der Quantentheorie: wie verhalten sich kleinste Teilchen, z.B. Elektronen?
- ▶ Elektronische Eigenschaften des Festkörpers: Beschreibung der Leitfähigkeit im Kristall
- ▶ Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer Strahlung und Halbleitern
- ▶ Halbleiter-Festkörper-Grenzflächen

## Literatur – siehe Moodle

- ▶ Ibach, Lüth; Festkörperelektronik: Einführung in die Grundlagen
- ▶ Hook, Hall; Solid State Physics
- ▶ Huebener, R; Leiter, Halbleiter, Supraleiter - Eine Einführung in die Festkörperelektronik : Für Physiker, Ingenieure und Naturwissenschaftler
- ▶ Kopitzki, K.; Einführung in die Festkörperelektronik
- ▶ Thuselt, F; Physik der Halbleiterbauelemente: Einführendes Lehrbuch für Ingenieure und Physiker

## Quanten (=Teilchen) und Wellen

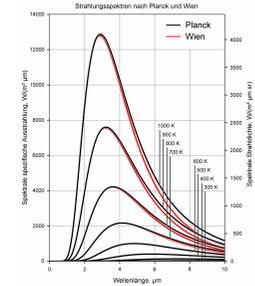
## Quanten und Wellen

- ▶ Quantenmechanik → im Nanometer-Bereich versagt die klassische Mechanik
- ▶ “nano” heißt
  - ▶ deBroglie-Wellenlänge  $\lambda = \hbar/p = \hbar/mv \approx$  Teilchengröße (Atome und darunter)
- ▶ Elektronen
  - ▶ Teilchencharakter – kleinste Ladungsmenge, Masse bestimmbar
  - ▶ Wellencharakter – Interferenz ist möglich
- ▶ Photonen
  - ▶ Wellencharakter – Beugung, Brechung
  - ▶ Teilchencharakter – Photonenenergie & -impuls

## Teilchencharakter der Lichtwellen

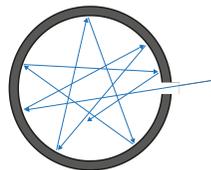
## Quantencharakter = Teilchencharakter des Lichts

- ▶ klassisches Strahlungsgesetz  $\sim \nu^4$ 
  - ▶ harmonische Oszillatoren mit gleichverteilter Energie
  - ▶ divergiert für  $\nu \rightarrow \infty$
- ▶ Lösung nach Planck:
  - ▶ nur diskrete Energiezustände  $nh\nu$
  - ▶ Besetzungswahrscheinlichkeit nimmt mit zunehmender Energie ab
- ▶ erstes experimentell gezeigtes Auftreten des Welle-/Teilchen-Dualismus



## genauer: klassisches Strahlungsgesetz

- ▶ Idealisierung: Hohlraum mit stehenden Wellen
- ▶ umso mehr Wellen passen hinein, je höher die Frequenz  $\nu = c/\lambda$
- ▶ Zustandsdichte  $g(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$
- ▶  $g$  gibt Anzahl der Zustände (hier: EM-Moden) pro Frequenzintervall, und pro Volumen



## klassisches Strahlungsgesetz

- ▶ klass. Thermodynamik: allen harmonischen Oszillatoren wird die gleiche Energie  $kT$  zugeschrieben
- ▶ aus der Zustandsdichte folgt dann die Energiedichte

$$U(\nu, T) d\nu = g(\nu)kT d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu$$

- ▶ Rayleigh-Jeans Strahlungsgesetz sagt eine unendliche Energiedichte durch Anregung unendlich vieler Schwingungszustände voraus ( $\int_0^\infty U(\nu, T) d\nu \rightarrow \infty$ )
- ▶ **Problem**, Rayleigh-Jeans gilt also nur für kleine Frequenzen, nicht z.B. für Licht

## Lösung: Planck'sche Strahlungsformel

- ▶ gleicher Ansatz für die Zustandsdichte  $g(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$
- ▶ aber: **keine** Gleichverteilung der Energie, sondern abhängig von der Schwingungsfrequenz  $\nu$
- ▶ jedem Oszillator wird ein Energiequant  $h\nu$  zugeordnet
- ▶ Besetzung dieser Zustände von der Energie des Systems (Temperatur  $T$ ) und dem jeweiligen Energiequant  $h\nu$  exponentiell abhängig

$$\propto \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

- ▶ je **größer** das Energiequant, um so **unwahrscheinlicher** ist die Anregung dieses Oszillators

## Planck'sche Strahlungsformel

- ▶ im Mittel trägt jeder Oszillator die folgende Energie bei

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

(Bose-Einstein-Statistik)

- ▶ damit folgt die Energiedichte

$$U(\nu, T) d\nu = g(\nu) E(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu$$

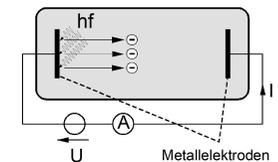
- ▶ diese ist beschränkt für Integration über alle  $\nu$ , weil  $\nu^3 / \exp(\nu) \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$

## Ergebnis der Schwarzkörperstrahlung

- ▶ Licht hat nicht nur Wellen- sondern auch Teilchencharakter: jedem Lichtquant wird eine diskrete Energie  $h\nu$  zugeschrieben  
→ **Quantenenergie**
- ▶ Die **Zustandsdichte** zeigt uns, wieviele mögliche Zustände das System einnehmen kann – i.A. durch geometrische Randbedingungen gegeben
- ▶ Zustände sind nicht gleichverteilt, sondern ihre **Besetzung** hängt von ihrer **Quantenenergie** bezogen auf die Gesamtenergie (**Temperatur**) des Systems ab
- ▶ Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlichkeiten sind zentrale Konzepte, um die **Teilchendichte** in einem quantenmechanischen System zu verstehen
- ▶ besonders auch *Elektronen im Halbleiter* → **Leitfähigkeit**

## Messung der Quantenenergie: Photoelektrischer Effekt

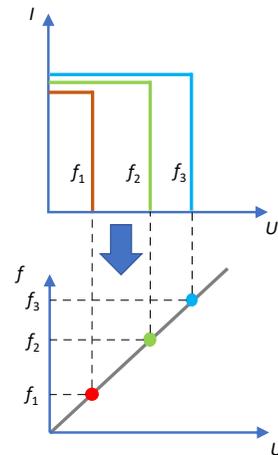
- ▶ Vakuumröhre, Metallelektrode, Bestrahlung mit Licht der Wellenlänge  $\lambda = c/\nu$
- ▶ Elektronen werden herausgeschlagen.  
Beobachtungen:



1. Bremsspannung  $U$  zur Messung der kinetischen Energie der Elektronen: Strom  $I$  verschwindet, wenn  $q|U| > E_{kin}$
2. Photostrom  $I$  ist **proportional** zur **Intensität** (Anzahl einfallender Photonen)
3. bei  $U = 0$  ist  $I$  **unabhängig** von der Wellenlänge → Widerspruch zur klassischen Theorie

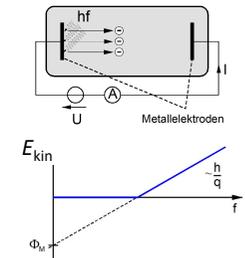
## Bestimmung der kinetischen Energie im Experiment

- ▶ für jede Wellenlänge  $\lambda = c/f$  wird der Photostrom  $I$  für steigende Bremsspannung  $U$  erfasst
- ▶ unterhalb einer Frequenz  $f_0$  wird kein Photostrom gemessen
- ▶ Auftragung der Quantenenergie  $h\nu$  über der Bremsspannung  $U$



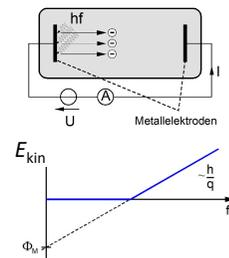
## Auswertung des Photoeffekts

- ▶ monochromatisches Licht mit veränderter Wellenlänge  $\lambda = c/f$
- ▶ kinetische Energie  $E_{kin}$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  wird ermittelt: Auftragung von  $U$  über  $h\nu$
- ▶ Ergebnis für  $E_{kin}$ :
  - ▶ nicht von der Intensität abhängig, nur von der Wellenlänge  $\sim 1/f$
  - ▶ ist für kleine Frequenzen nicht messbar
  - ▶ steigt ab einer gewissen Frequenz linear mit  $h/q$
- ▶ Folgerung: Quantenenergie  $h\nu$



## Ergebnis des Photoeffekts

- ▶ Quantenenergie  $h\nu = hf = hc/\lambda$  bestätigt
- ▶ Intensität = Zahl der Photonen mit Energie  $h\nu$ , Energie  $\neq$  Intensität
- ▶ Energieerhaltung:  $E_{kin} + \Phi_M = h\nu$  mit vom Metall abhängiger Austrittsarbeit  $\Phi_M$
- ▶ Austrittsarbeit  $\Phi_M$  beschreibt, wie Elektronen im Metall gebunden sind, sich dort jedoch (fast) frei bewegen können  $\rightarrow$  Erklärung im weiteren Verlauf der Vorlesung

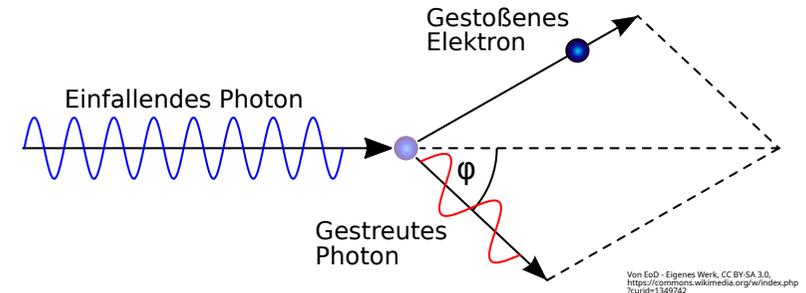


kurze Pause – 5 min

## Energie und Impuls

- ▶ klassische Teilchen haben einen Impuls  $p = m \cdot v$ , kann man einem Photon einen Impuls zuschreiben?
- ▶ Beobachtung von Compton (1922): an Graphit gestreute Röntgenstrahlung
  - ▶ ausfallende Strahlung hat niedrigere Frequenz als einfallende
  - ▶ Streuwinkel in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung unterschiedlich
- ▶ deutet auf **Teilchenstreuung** hin, wo ein **Impulsübertrag** stattfindet
- ▶ mit klassischem Bild der Reflexion an einem oszillierenden Elektron nicht vereinbar (dort keine Frequenzänderung des Lichts)

## Compton-Effekt

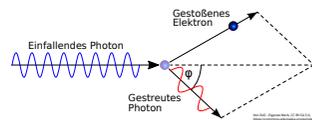


Von EoD - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1348742>

Abbildung: Compton-Streuung eines Photons an ruhendem Elektron

## Compton-Effekt

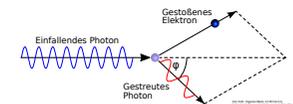
- ▶ einfallendes Photon mit hoher Energie (Röntgenquant)
  - ▶ ruhendes Elektron
  - ▶ inelastische Streuung = Energieabgabe des Photons
  - ▶ Erhaltung von Impuls und Energie
    - ▶ gegenläufige Bewegung in  $Y$
    - ▶ Verteilung von Streuwinkeln  $\varphi$
    - ▶ Elektron besitzt nach Streuung kinetische Energie und damit einen Impuls
- ⇒ Einfallendes Photon muss Impuls besessen haben



## Compton-Effekt: Streuwinkel

	Energie des...		Impuls des...	
	Elektrons	Photons	Elektrons	Photons
vorher	$E_e = m_e c^2$	$E_\gamma = h\nu$	$p_\gamma = h\nu/c$	$p_e = 0$
nachher	$E'_e$	$E'_\gamma = h\nu'$	$p'_\gamma = h\nu'/c$	$p'_e$

- ▶ Energieerhaltung  $E_e + E_\gamma = E'_e + E'_\gamma$
- ▶ Impulserhaltung  $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\gamma$
- ▶ Energie-Impuls-Beziehung (SRT)
 
$$E_e^2 = E_e'^2 - p_e'^2 c^2$$
- ▶ Kosinussatz  $p_e'^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2 \cdot p_\gamma \cdot p_\gamma' \cdot \cos \varphi$



## Compton-Effekt: Streuwinkel

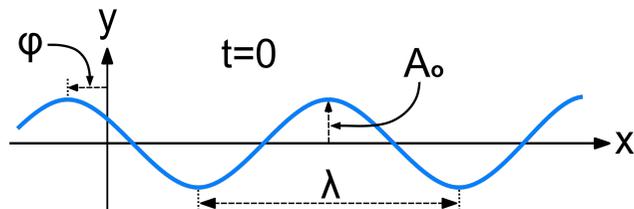
- ▶ Einsetzen und Auflösen nach Photonenfrequenz vorher  $\nu$  und nachher  $\nu'$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \varphi)$$

- ▶ Photonen haben also einen Impuls  $h\nu/c$
- ▶ in der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen gelten Energie- und Impulserhaltung
- ▶ wichtig für Optoelektronik

## Umkehrung: Haben Teilchen einen Wellencharakter?

## Teilchen als Welle darstellen?



- ▶ Ebene Welle – keine Lokalisierung, die Welle sieht überall gleich aus

$$\Psi(x, t) = A_0 \cdot \cos(\omega t - k \cdot x - \varphi)$$

$$\text{mit } k = 2\pi/\lambda$$

$$\text{und } \omega = 2\pi c/\lambda = 2\pi f$$

## Ortsinformation im Wellenpaket

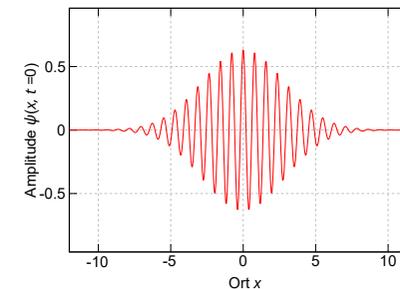


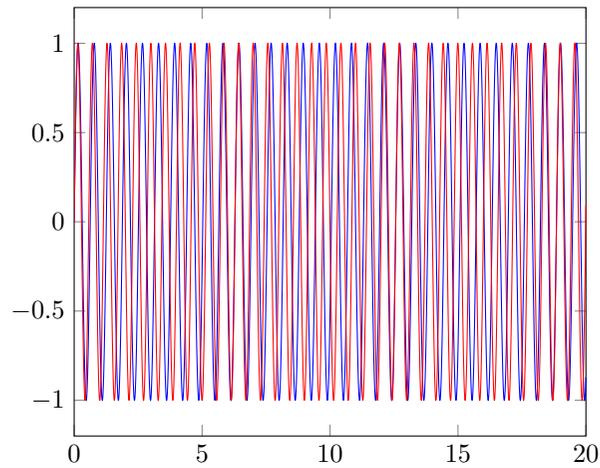
Abbildung: Gauss'sches Wellenpaket<sup>1</sup>

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) \cdot \exp[j(\omega t - kx)] dk$$

$$C(k) = \exp\left[-(k - k_0)^2 / \sigma^2\right]$$

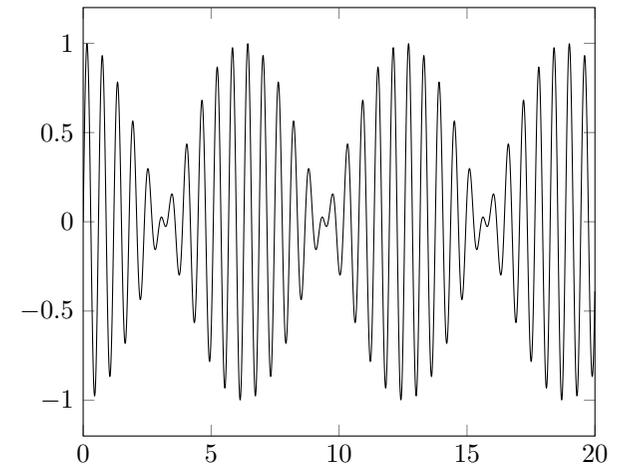
<sup>1</sup>Geek1337, CC BY-SA 3.0, <https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=4702366>

## Überlagerung ebener Wellen



$$\sin(kx), \quad \sin(1.1kx)$$

## Überlagerung ebener Wellen



$$[\sin(kx) + \sin(1.1kx)] / 2$$

## Einwurf: komplexe Zahlen

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Betrag = Amplitude

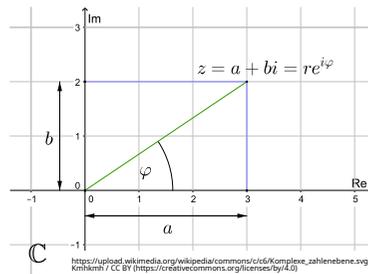
→ Wahrscheinlichkeit des Aufenthalts

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Winkel-Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}$

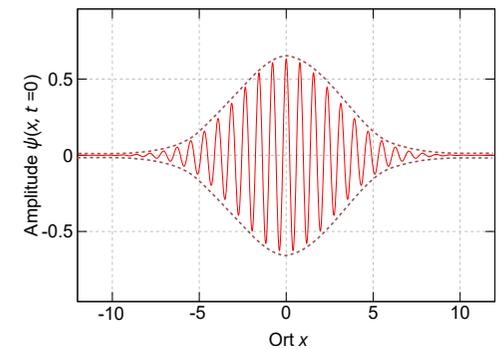
= Kreisfrequenz  $\omega$

$$\rightarrow \text{Quantenenergie } h\nu = \frac{h}{2\pi} \omega \equiv \hbar \omega$$



## Wellenpaket

- ▶ Lokalisierung
  - ▶ Schwerpunkt des Teilchens
  - ▶ Absolutquadrat der Amplitude
  - ▶ Einhüllende
- ▶ Wellenfunktion
- ▶ im Ortsraum verschmiert
- ▶ beschreibt z.B. freies Elektron



## allgemeine Wellenfunktion

- ▶ beschreibt einen Zustand
- ▶ ganzes System kann als Überlagerung (Linearkombination) von Zuständen beschrieben werden
- ▶ die Wellenfunktion ist normiert  $\int_V |\Psi(x, t)|^2 d^3x = 1$  zu jeder Zeit  $t$   
→ Teilchenerhaltung
- ▶ Interpretation von Absolutbetrag  $|\Psi(x, t)|^2$  als Aufenthaltswahrscheinlichkeit
- ▶ aus der **Wellenfunktion** lassen sich Ort, Impuls, Energie des **Teilchens** bestimmen
- ▶ Atome, Moleküle, Festkörper nur mithilfe des Welle-Teilchen-Dualismus erklärbar

## Wellencharakter der Materie

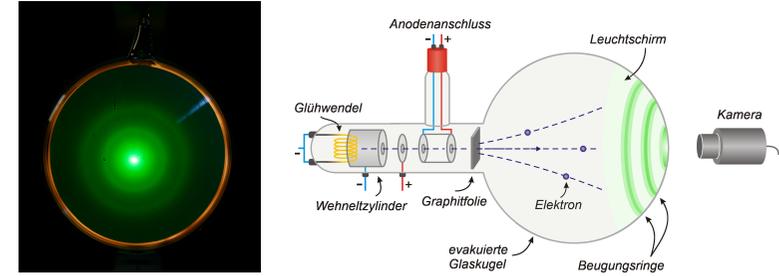


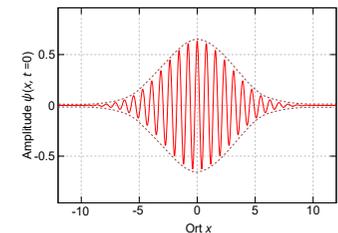
Abbildung: Elektronenbeugung an polykristallinem Graphit

## Unschärfe

- ▶ Beobachtung eines Elektrons am Ort  $x$  mittels Lichtstrahl
  - ▶ Beugung abhängig von der Lichtwellenlänge → Ortsungenauigkeit  $\Delta x$
  - ▶ Ortsmessung durch Lichtquant bewirkt Impulsübertrag (s. Compton) → Impulsunschärfe  $\Delta p$
- ▶ Abschätzung nach Heisenberg  $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h$
- ▶ Planck'sches Wirkungsquantum  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
- ▶ in der klassischen Mechanik *unbekannt*
  - ▶ klassische Teilchen sind zu schwer → deBroglie's Materie-Wellenlänge  $\lambda_{dB} = h / (mv) \ll \ll$  Objektgröße
  - ▶ in der Klassik sind Ort und Impuls genau bestimm- und vorhersagbar

## Unschärferelation

- ▶ konjugierte Größen lassen sich nur auf  $\hbar$  genau bestimmen
  - ▶ Ort und Impuls  $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$
  - ▶ Energie und Zeit  $\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar$
  - ▶ Produkte der Einheit J s
- ▶ Ableitung beobachtbarer Größen aus der Wellenfunktion
  - ▶ prinzipielle "Ungenauigkeit"
  - ▶ mehrere Oszillationen erforderlich, um eine Welle darzustellen



## Überblick: Beschreibung von quantenmechanischen Systemen

## Bewegungsgleichung

- ▶ beschreibt die Entwicklung eines Systems unter **äußeren Einflüssen** (Felder, ...) und Beachtung **erhaltener Größen** (Energie, ...)
- ▶ klassische Bewegungsgleichung:
  - ▶ **Newton**  $F = ma$ , *Kräftegleichgewicht*
  - ▶ **Hamilton-Funktion**  $\mathcal{H}(q_k, p_k, t) = E, k = 1 \dots N$ , *Energiebilanz*
  - ▶ z.B. für einen Massepunkt  $\mathcal{H}(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$
  - ▶ daraus für Massepunkt  $k$  die Ortsentwicklung  $\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$  und die Impulsentwicklung  $\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}$

## Bewegungsgleichung Quantenmechanik

- ▶ **Schrödinger-Gleichung, Energiebilanz**

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- ▶ mit Energie-Operator

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

→ **Quantenenergie** des Zustands, z.B. Bindungsenergie des Elektrons im Wasserstoff-Atom

## Bewegungsgleichung Quantenmechanik

- ▶ **Schrödinger-Gleichung, Energiebilanz**

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- ▶ mit Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ **kinetische Energie** des Teilchens

## Bewegungsgleichung Quantenmechanik

- ▶ **Schrödinger-Gleichung, Energiebilanz**

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- ▶ mit Potential

$$V(\vec{r}, t)$$

→ **äußere Einflüsse**,  
z.B. positive Ladung des Atomkerns

## Bewegungsgleichung Quantenmechanik

- ▶ **Schrödinger-Gleichung, Energiebilanz**

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- ▶ **geometrische Randbedingungen** im Ansatz für  $\Psi$  berücksichtigen,  
z.B. für eingeschlossenes Teilchen  $\Psi \rightarrow 0$   
an den Rändern des Volumens

## Quantenstatistik

- ▶ viele Zustände im Festkörper verfügbar (vgl. Atom- und Molekülorbitale)
- ▶ welche dieser Zustände sind besetzt?
- ▶ zur Bestimmung erforderlich (vgl. Planck'sches Strahlungsgesetz):
  - ▶ Quanten-Energie der möglichen Zustände
  - ▶ Wahrscheinlichkeit der Besetzung
- ▶ im Festkörper sind ca.  $6 \cdot 10^{23}$  Atome pro  $\text{cm}^3$ 
  - ▶ Zustände können nicht einzeln berechnet werden
  - ▶ Ausnutzung von Symmetrie im **Kristall**
  - ▶ **Einheitszelle** mit Translationsinvarianz

## in der Vorlesung behandelte Konzepte

- ▶ Elektronen = Wellenfunktionen
- ▶ Bewegungsgleichung: Schrödinger
- ▶ Einfluss innerer und äußerer Felder
  - ▶ Elektrische Felder – Atomrümpfe, angelegte Spannungen
  - ▶ magnetische Felder
- ▶ Wechselwirkung mit Licht
  - ▶ Absorption von Lichtquanten
  - ▶ Emission

## Ausblick auf 1. Übung (Montag)

- ▶ Größenordnungen
  - ▶ Ladungsträgerkonzentration
  - ▶ logarithmische Darstellung
- ▶ mittlere Elektronenenergie und Temperatur  $T$
- ▶ gebräuchliche Einheiten, z.B. eV
- ▶ komplexe Darstellung  $z = x + iy$
- ▶ ebene Wellen  $\exp[i(kx - \omega t - \varphi)]$ 
  - ▶ Wellenzahl  $k$
  - ▶ Kreisfrequenz  $\omega$

Danke für Ihre Teilnahme

Fragen?