

Festkörperelektronik

Vorlesung 7

Prof. Nils Weimann

IW / Bauelemente der Höchstfrequenzelektronik (BHE)

05.06.2025



Vorlesung am 20.06. fällt aus
(Übungen/Tutorien finden statt)

Zusammenfassung letzte Vorlesung

- ▶ elektronische Eigenschaften des Festkörpers
- ▶ Leitfähigkeit
- ▶ Stoffklassen Isolator, Halbleiter, Metall
- ▶ Konzentration von Elektronen und Löchern
- ▶ Eigenleitung
- ▶ Dotierung
- ▶ Temperaturverlauf der Ladungsträgerkonzentration
- ▶ Erschöpfungsbereich → Bauelemente

Ziele der heutigen Vorlesung

- ▶ Ladungstransport im Festkörper
 - ▶ elektrischer Strom
 - ▶ Ladungsträgerkonzentration
 - ▶ Geschwindigkeit der Ladungsträger
 - ▶ Beweglichkeit
 - ▶ äußere Felder (**E** und **H**)
 - ▶ Generation & Rekombination
 - ▶ Halbleitergleichungen
- ▶ Wechselwirkung mit Licht
 - ▶ Absorption
 - ▶ Emission
 - ▶ Photoleitung
 - ▶ Halbleiterlaser

Ladungstransport im Festkörper

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Stromdichte ist Strom I pro Querschnittsfläche A

$$J = I/A \quad \text{in Einheiten} \quad [J] = \text{A/cm}^2$$

- ▶ Strom fließt in eine Richtung \rightarrow Vektorgröße \vec{J}
- ▶ Produkt aus \pm Elementarladung, Ladungsträgerdichte und Geschwindigkeit

$$\vec{J} = -qn\vec{v}_n + qp\vec{v}_p$$

- ▶ in Einheiten

$$[J] = \text{C} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{cm/s} = \frac{\text{C}}{\text{s}} / \text{cm}^2 = \text{A/cm}^2$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ geladene Teilchen folgen einem elektrischen Feld \mathbf{E}
 - ▶ positive Teilchen (Löcher) folgen den \mathbf{E} -Feldlinien
 - ▶ negativ geladene (Elektronen) bewegen sich antiparallel zum \mathbf{E} -Feld
 - ▶ **gerichtete** Bewegung
- ▶ dazu kommt die **ungerichtete** thermische Bewegung aufgrund der thermischen Energie $\approx kT$

$$W_{th} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m^*v_{th}^2 = \frac{1}{2}m^* \left(\frac{\hbar k}{m^*} \right)^2$$

- ▶ aufgelöst nach der thermischen Geschwindigkeit v_{th}

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m^*}}$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ thermische Geschwindigkeit v_{th}

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m^*}}$$

- ▶ weil die Masse der Elektronen/Löcher klein ist, sind diese Geschwindigkeiten groß, *mittlere* Geschwindigkeit $v_{th} \approx 10^7$ cm/s
- ▶ statistische Verteilung der Geschwindigkeit in Richtung und Betrag
- ▶ Nettostrom aufgrund thermischer Bewegung ist im zeitlichen Mittel $= 0!$
- ▶ bei kurzen Integrationszeiten als Rauschen messbar

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ v hängt mit kinetischer Energie W_{kin} zusammen, z.B. für Elektronen im Leitungsband mit der Unterkante W_L

$$W = W_L + W_{kin} = W_L + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*}$$

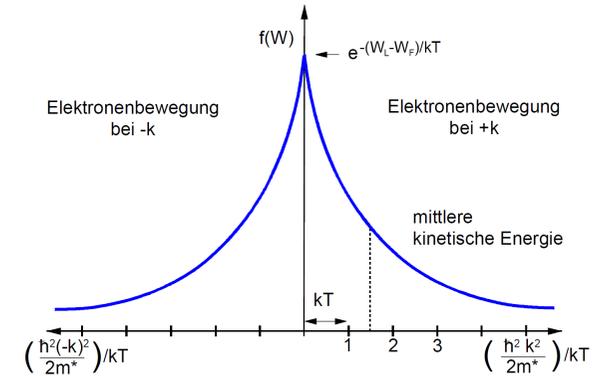
- ▶ Verteilungsfunktion $f(W)$ gibt an, welche Geschwindigkeiten auftreten

$$\begin{aligned} f(W) &= e^{-\frac{W-W_F}{kT}} \\ &= e^{-\frac{W_L-W_F}{kT}} \cdot e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2m^* kT}} \end{aligned}$$

Ladungstransport im Festkörper

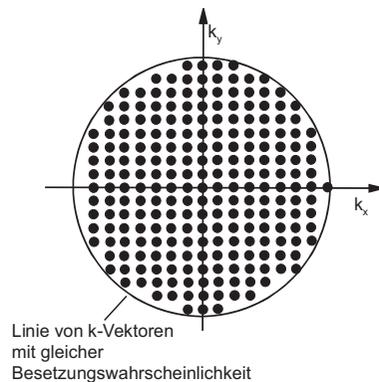
- ▶ graphische Darstellung

$$f(W) = e^{-\frac{W_L-W_F}{kT}} \cdot e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2m^* kT}}$$



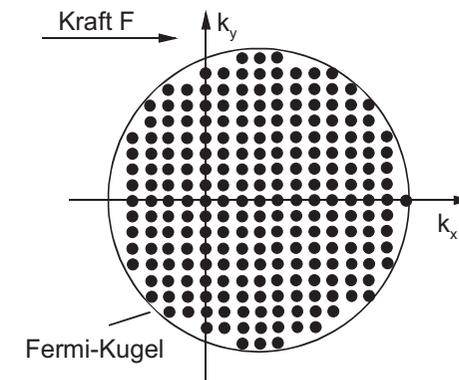
Ladungstransport im Festkörper

- ▶ besetzte Fermi-Fläche in 2D (in 3D: Kugel)



Ladungstransport im Festkörper

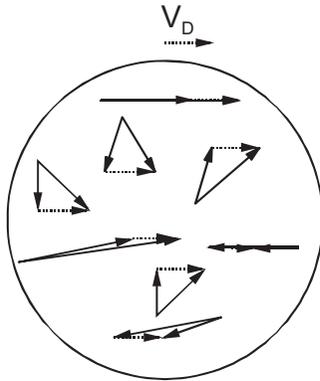
- ▶ besetzte Fermi-Fläche in 2D mit **äußerem Feld**



- ▶ Fermikugel wird durch Kraft verschoben
- ▶ Umsetzung der Elektronen im k -Raum
- ▶ erklärt konstanten Stromfluss mit konstantem Feld (Ohm)

Ladungstransport im Festkörper

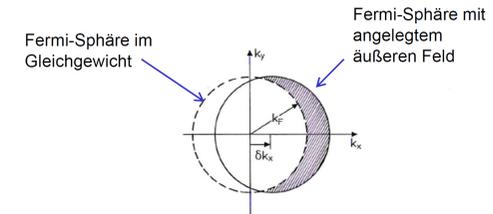
- ▶ Momentaufnahme Fermi-Fläche in 2D mit äußerem Feld und **thermischer Bewegung**



- ▶ resultierende Driftgeschwindigkeit $v_D \neq v_{th}$

Ladungstransport im Festkörper

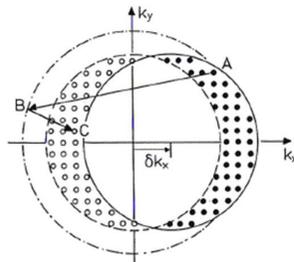
- ▶ Fermi-Fläche in 2D ohne (im Gg.) und mit äußerem Feld



- ▶ zusätzlicher Betrag zur Wellenzahl = Kristallimpuls δk_x durch Feld
- ▶ erwarte durch äußere Kraft ($F = ma$) konstante Beschleunigung?
- ▶ d.h. immer weiter wachsendes k_x ?

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Erklärung: „Reibung“
- ▶ Elektronen werden durch Kollisionen abgebremst
 - ▶ periodisches Potential in der eff. Masse m^*
 - ▶ geladene Dotieratome (Coulomb-Streuung, *elastisch*, Umverteilung im k -Raum)
 - ▶ mechanische Gitterschwingungen \rightarrow Kristalltemperatur (Phononen-Streuung, *inelastisch*)



Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Beschreibung der Driftgeschwindigkeit v_D
- ▶ Kraft auf negativ geladenes Teilchen $\vec{F}_n = -q \cdot \vec{E}$
- ▶ daher Beschleunigung $\vec{F} = m_n^* \cdot \vec{a}$
- ▶ gleichgesetzt $a = -\frac{q}{m_n^*} \vec{E}$
- ▶ das wäre eine konstante Beschleunigung, mit immer weiter steigender Geschwindigkeit

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Stoßprozess führt zum Rücksetzen der Geschwindigkeitskomponente in Feldrichtung (weil dies die Vorzugsrichtung der Elektronenbewegung ist)
- ▶ dann wird das Elektron wieder beschleunigt
- ▶ usw.
- ▶ mittlere Zeit τ_n^* zwischen Stößen
- ▶ aufgenommene Geschwindigkeit beim Stoßprozess

$$v_{Dn}^* = \int_0^{\tau_n^*} \vec{a} dt = \vec{a} \cdot \tau_n^*$$

- ▶ Mittelwertbildung (lineare Beschleunigung)

$$v_{Dn} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \tau_n^* = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*} = \vec{a} \cdot \tau_n$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Driftgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{Dn} = \vec{a} \cdot \tau_n$$

- ▶ Kräftegleichgewicht

$$a = -\frac{q}{m_n^*} \vec{E}$$

- ▶ eingesetzt

$$\vec{v}_{Dn} = -\frac{q}{m_n^*} \cdot \tau_n \cdot \vec{E}$$

- ▶ Proportionalitätskonstante: Beweglichkeit μ_n

$$\frac{q}{m_n^*} \cdot \tau_n \equiv \mu_n \Rightarrow \vec{v}_{Dn} = -\mu_n \cdot \vec{E}$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ analog für Löcher Driftgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{Dp} = \vec{a} \cdot \tau_p$$

- ▶ Kräftegleichgewicht (hier positives Vorzeichen)

$$a = +\frac{q}{m_p^*} \vec{E}$$

- ▶ eingesetzt

$$\vec{v}_{Dp} = +\frac{q}{m_p^*} \cdot \tau_p \cdot \vec{E}$$

- ▶ Proportionalitätskonstante: Beweglichkeit μ_p

$$\frac{q}{m_p^*} \cdot \tau_p \equiv \mu_p \Rightarrow \vec{v}_{Dp} = \mu_p \cdot \vec{E}$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ gesamte Stromdichte $J = J_n + J_p$

$$\begin{aligned} J &= q(-n \cdot v_n + p \cdot v_p) \\ &= q(-n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p) \cdot E \end{aligned}$$

- ▶ Proportionalität zwischen Stromdichte und Feldstärke

$$J = \kappa \cdot E = (\kappa_n + \kappa_p) \cdot E$$

- ▶ oder auch

$$J = \sigma \cdot E = (\sigma_n + \sigma_p) \cdot E$$

- ▶ Leitfähigkeit

$$\kappa \equiv \sigma$$

- ▶ spezifischer Widerstand

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Abhängigkeit der Beweglichkeit

$$\mu = q \frac{\tau}{m^*}$$

- ▶ Temperatur T
- ▶ Ladungsträgerdichte n oder p
- ▶ elektrische Feldstärke E

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit $\mu = q \frac{\tau}{m^*}$
- ▶ effektive Masse m^* ist abhängig von (s. Kronig-Penney)
 - ▶ Potentialhöhe und
 - ▶ Atomabstand, beide ändern sich kaum mit T
- ▶ Wechselwirkung mit Gitterschwingungen
 - ▶ bei $T = 0$ perfektes Gitter → sehr hohe Beweglichkeiten
 - ▶ für $T > 0$ vibriert der Kristall → Auslenkung des Atomabstands, Federmodell

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Gitterschwingungen können als Teilchen interpretiert werden (*Phononen*, analog zu Teilchen- und Wellenmodell des Elektrons)
- ▶ Zusammenstoß Elektron – Phonon führt zu Energieübertrag auf das Gitter → Aufheizen des Kristalls
- ▶ man findet $\mu_{ph} \sim (1/T)^{3/2}$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Dotierabhängigkeit der Beweglichkeit $\mu = q \frac{\tau}{m^*}$
- ▶ effektive Masse m^* abhängig von Bandstruktur, wenig geändert durch Dotierung
- ▶ geladene Dotieratome: Coulomb-Streuung, große Reichweite r_0^*
- ▶ steigende Dotierung → reduzierte Beweglichkeit
- ▶ Temperaturabhängigkeit?

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Temperaturabhängigkeit?
- ▶ Zeit zwischen Streuprozessen τ , Streurrate $1/\tau$
 - ▶ Streurrate $1/\tau = N \cdot v \cdot \sigma_R$ mit $v = v_{th} + v_D$
 - ▶ Rutherford Streuquerschnitt (Häufigkeit der Streuung)

$$\sigma_R \sim \left(\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\frac{1}{2}mv^2} \right)^2$$

- ▶ eingesetzt

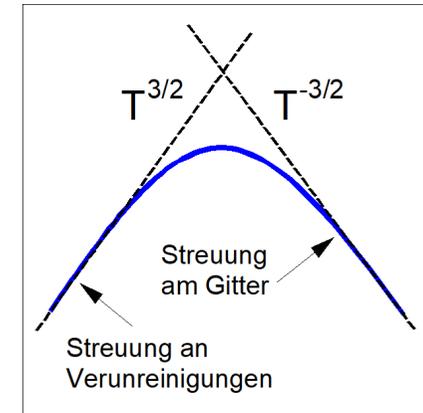
$$1/\tau \sim NZ^2/v^3 \sim NZ^2T^{-3/2}$$

- ▶ Ionized impurity scattering mobility $\mu_{ion} \sim \frac{T^{3/2}}{NZ^2}$

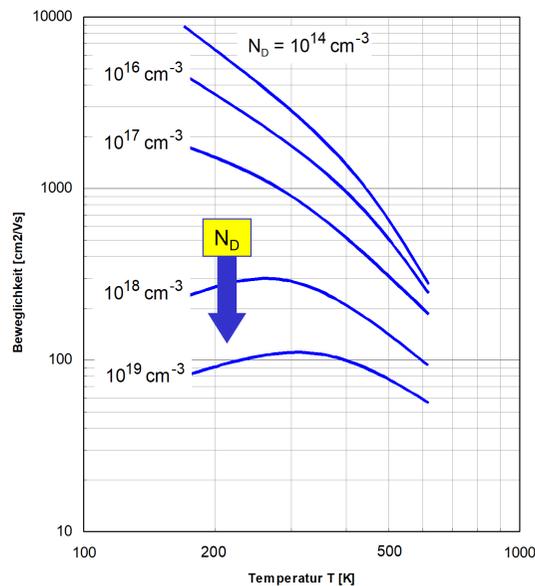
Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Kombination der Phononen- und ionisierten Störstellenstreuung
- ▶ Mathiesen-Regel – unabhängige Streuraten werden addiert

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{\mu_i}$$



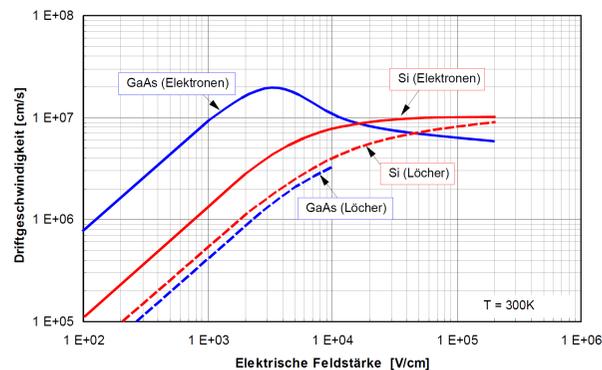
Ladungstransport im Festkörper



Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Abhängigkeit vom elektrischen Feld **E**
- ▶ kleine Felder, τ und m^* konstant
 - ▶ hier gilt das Ohm'sche Gesetz
 - ▶ $J = \kappa \cdot E$ und $v_D = \mu \cdot E$
- ▶ großes E-Feld, τ und m^* sind feldabhängig
 - ▶ Parabelnäherung $W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ mit konstantem m^* gilt nicht mehr, sondern m^* steigt mit der Energie W an
 - ▶ mit ansteigender Geschwindigkeit steigt die Streurrate (s.o.), damit wird μ kleiner
- ▶ fallende Beweglichkeit mit steigendem Feld
- ▶ Erreichen einer Sättigungsgeschwindigkeit v_{sat} für $E \rightarrow \infty$

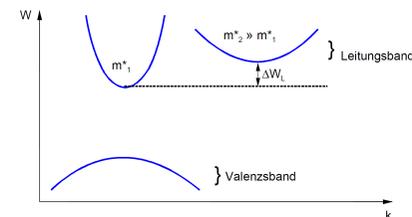
Ladungstransport im Festkörper



- ▶ Verlauf der Driftgeschwindigkeit v_D
- ▶ Beweglichkeit μ und Sättigungsgeschwindigkeit v_{sat}
- ▶ z.B. GaAs – negative differentielle Beweglichkeit $\partial v_D / \partial E$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ negative differentielle Beweglichkeit in GaAs oder InP
- ▶ Elektronen werden langsamer mit steigendem Feld
- ▶ führt zu lokaler Instabilität in der Elektronenverteilung
- ▶ Erzeugung von Mikrowellen (Gunn-Diode)
- ▶ Grund: Elektronen mit $W > \Delta W_L$ werden in benachbartes Band gestreut mit $m_2^* > m_1^*$



Ladungstransport im Festkörper

- ▶ **Feldstrom** als Antwort auf äußeres elektrisches Feld:

$$\vec{J}_{\text{Feld}} = \kappa \cdot \vec{E} = (\kappa_n + \kappa_p) \cdot \vec{E}$$

- ▶ Verbindung zur Bandstruktur?
- ▶ Energie durch elektrostatisches Potential

$$W = -q\varphi + \text{const.}$$

- ▶ Feld als Gradient (Ableitung) des Potentials

$$\text{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = -\vec{E}$$

- ▶ Gradientenoperator Nabla

$$\text{grad} \equiv \nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Nullpunkt der kinetischen Energie bei Bandkante W_L

$$W_L = -q\varphi \quad \text{und} \quad \nabla W_L = -q\nabla\varphi = q\vec{E}$$

- ▶ im Halbleiter ist $W_L = W_V + W_g$
(Energilücke $W_g = \text{const.} \rightarrow \nabla W_g = 0$)

$$\nabla W_L = \nabla (W_V + W_g) = \nabla W_V$$

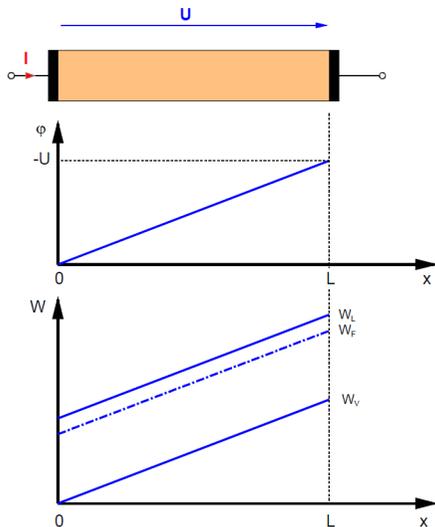
- ▶ Gradient bzw. Steigung des Leitungs- und Valenzbands = elektrisches Feld

$$\nabla W_L = \nabla W_V = q\vec{E}$$

- ▶ in einer Dimension

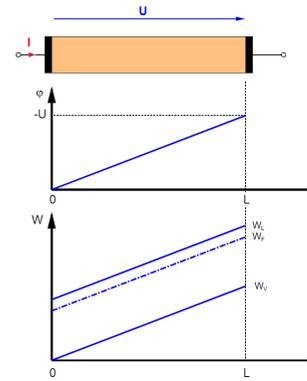
$$\frac{dW_L}{dx} = \frac{dW_V}{dx} = qE$$

Ladungstransport im Festkörper



- ▶ angelegte Spannung fällt linear über Halbleiter ab
- ▶ linear verlaufendes Potential φ im Halbleiter
- ▶ Leitungsbandkante W_L und Valenzbandkante W_V folgen dem Potentialverlauf
- ▶ Steigung der Bandkanten entspricht dem E-Feld
- ▶ Fermienergie?

Ladungstransport im Festkörper



- ▶ Fermienergie?
- ▶ Abstand Fermienergie – Bandkante gibt die Ladungsträgerkonzentration
- ▶ im homogen dotierten Halbleiter und bei konstantem Feld ist $E_C - E_F$ und $E_F - E_V$ örtlich gleich
- ▶ lokale Änderung Konzentration & Fermienergie → Bauelemente

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ **Diffusionsstrom** aufgrund von Konzentrationsunterschieden
- ▶ Teilchenstromdichte aus Diffusionsgesetz

$$\vec{s} = -D\nabla n(x)$$

- ▶ geladene Teilchen → elektrische Stromdichte J

$$J_{n,diff} = -q \cdot \vec{s}_n = +qD_n \nabla n(x)$$

$$J_{p,diff} = +q \cdot \vec{s}_p = -qD_p \nabla p(x)$$

- ▶ im Bauelement treten sehr große Gradienten auf
- ▶ z.B. pn -Diode und BJT, $p \rightarrow n$ über $\ll 1 \mu\text{m}$ Strecke
- ▶ Diffusionsströme und Feldströme bestimmen zusammen die Funktion von Bauelementen

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ „detailliertes Gleichgewicht“
- ▶ zu jedem Mikroprozess besteht ein Gegenprozess, der das System im Gleichgewicht erhält
- ▶ z.B. kein Stromfluss über pn -Übergang ohne äußere Spannung (das wäre sonst ein perpetuum mobile)
- ▶ Summe der Ströme ist null

$$\vec{J}_n = \vec{J}_{n,Diff} + \vec{J}_{n,Feld} = 0$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Einsetzen von Diffusions- und Feldstrom

$$0 = \vec{J}_{n,Diff} + \vec{J}_{n,Feld} = q \left[D_n \nabla n(x) + \mu_n n \vec{E}(x) \right]$$

- ▶ Ladungsträgerkonzentration

$$n(x) = N_L \cdot \exp\left(\frac{W_L(x) - W_F}{kT}\right)$$

- ▶ Gradient von W_L ist das E-Feld, und W_F ist örtlich konstant im Gleichgewicht

$$\nabla n(x) = N_L \cdot \frac{\nabla W_L(x)}{kT} \cdot \exp\left(\frac{W_L(x) - W_F}{kT}\right) = n(x) \cdot \frac{-q\vec{E}(x)}{kT}$$

- ▶ eingesetzt in 1. Zeile

$$0 = q n(x) E(x) \left[-D_n \frac{q}{kT} + \mu_n \right]$$

- ▶ Gleichung ist allgemein erfüllt wenn $[\dots] = 0$

$$\mu_n = D_n \frac{q}{kT} \quad \text{bzw.} \quad \mu_p = D_p \frac{q}{kT} \quad \text{Einstein-Beziehung}$$

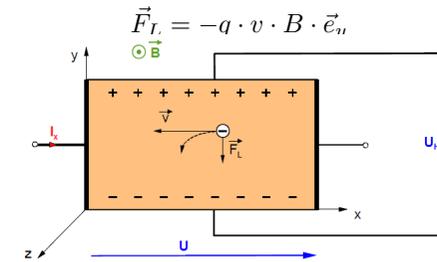
Ladungstransport im Festkörper

- ▶ was passiert im **Magnetfeld**?

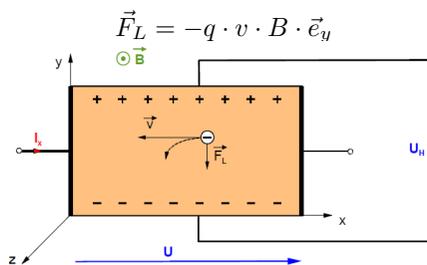
- ▶ auf bewegte Teilchen mit Ladung Q und Geschwindigkeit v im Magnetfeld B wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

- ▶ für Elektron $Q = -q$, und senkrechte Geometrie $\vec{v} \perp \vec{B}$

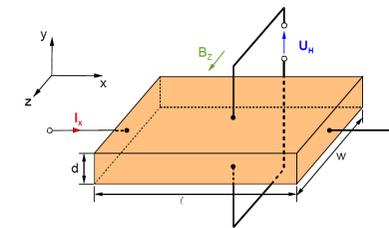


Ladungstransport im Festkörper



- ▶ äußere Spannung U führt zu Stromfluss I
- ▶ Elektronen werden nach unten ($-y$) abgelenkt
- ▶ durch Anhäufung negativer Ladung an der Unterkante der Probe: Ausbildung einer Hall-Spannung $U_H \neq U$
- ▶ **Hall-Effekt** → getrennte Bestimmung von μ und n

Ladungstransport im Festkörper



- ▶ Ablenkung der e^- nach unten ($-y$)
- ▶ elektrisches Feld durch Ladungstrennung $U_H = -E_y \cdot d$
- ▶ Kräftegleichgewicht $|F_{el}| = |F_H|$ bzw. $q \cdot E_y = q \cdot v \cdot B_z$
- ▶ damit $U_H = -v \cdot d \cdot B_z$
- ▶ Strom in x -Richtung $I_x = q \cdot n \cdot v \cdot A = q \cdot n \cdot v \cdot d \cdot W$
- ▶ damit $U_H = -\frac{1}{n \cdot q} \cdot \frac{I_x \cdot B_z}{W} \equiv R_H \cdot \frac{I_x \cdot B_z}{W}$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ Messung der Hall-Spannung gibt die Ladungsträgerkonzentration unabhängig von der Beweglichkeit

$$U_H = -\frac{1}{n \cdot q} \cdot \frac{I_x \cdot B_z}{W}$$

- ▶ Messung der elektrischen Leitfähigkeit κ_n ohne Magnetfeld gibt das Produkt von Ladungsträgerkonzentration n und Beweglichkeit μ

$$\kappa_n = q \cdot n \cdot \mu_n = \frac{I_x}{U} \cdot \frac{\ell}{d \cdot w} \quad (U \neq U_H!)$$

- ▶ mit den Halldaten kann daher die Beweglichkeit berechnet werden

$$\mu_n = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \kappa_n = -R_H \cdot \kappa_n$$

Ladungstransport im Festkörper

- ▶ **Hallfaktor** im n -Halbleiter

$$R_H = -\frac{1}{q \cdot n}$$

- ▶ bei Löcherleitung in p -Halbleitern gilt für den Hallfaktor

$$R_H = +\frac{1}{q \cdot p}$$

- ▶ unterschiedliche Ablenkung von Elektronen und Löchern in der Hall-Messung
- ▶ aus dem Vorzeichen der Hallspannung U_H kann der Ladungsträgertyp n oder p bestimmt werden

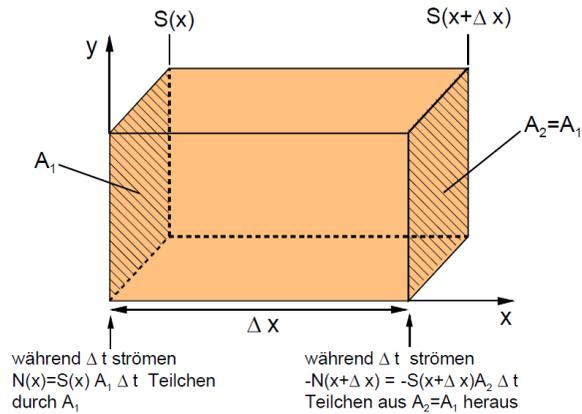
Halbleitergleichungen

Halbleitergleichungen

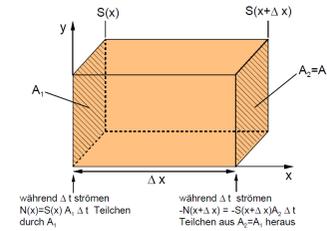
- ▶ in Bauelementen bewegen sich Ladungsträger
 - ▶ ortsabhängig, z.B. unter einem Gate im Transistor je nach Gatespannung
 - ▶ zeitabhängig, je nach anliegendem Signal
- ▶ bis jetzt nur zeitlich konstantes Verhalten untersucht
- ▶ Konzentrationsabhängigkeit über Diffusionsgesetz
- ▶ allgemein braucht es eine Beschreibung von Systemen, die sich nicht im Gleichgewicht befinden
 - ▶ örtliche Stromdichteänderung
 - ▶ Ladungsträger-Generation
 - ▶ Ladungsträger-Rekombination

Halbleitergleichungen

- ▶ örtliche Stromdichteänderung
- ▶ betrachte ein bestimmtes Volumen



Halbleitergleichungen



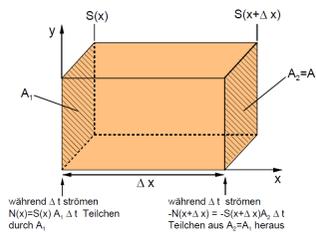
- ▶ Teilchenzahl $N(x)$ und Teilchenzahldichte $n(x)$

$$N(x) = n(x) \cdot \Delta x \cdot A = n(x) \cdot [v \cdot \Delta t] \cdot A$$

- ▶ Teilchenstromdichte

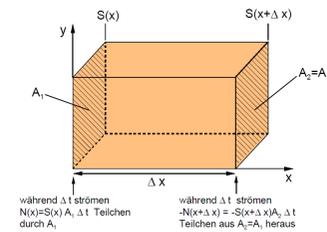
$$s(x) = n(x) \cdot v = \frac{N(x)}{\Delta t \cdot A}$$

Halbleitergleichungen



- ▶ einströmende Teilchen $N(x)$ durch Fläche A_1
- ▶ ausströmende Teilchen $N(x + \Delta x)$ durch Fläche A_2
- ▶ Teilchenzahländerung im Volumen $\Delta N = N(x) - N(x + \Delta x)$

Halbleitergleichungen



- ▶ Teilchenzahländerung im Volumen

$$\Delta N = N(x) - N(x + \Delta x)$$

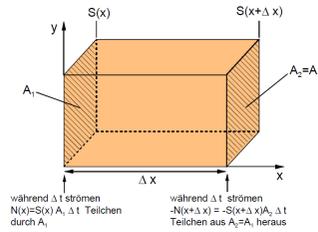
- ▶ ausgedrückt mit Stromdichten

$$\Delta N = \{s(x) - s(x + \Delta x)\} \cdot A \cdot \Delta t$$

- ▶ Taylorentwicklung

$$\Delta N = \left\{ s(x) - \left[s(x) + \Delta x \frac{\partial s(x)}{\partial x} \right] \right\} \cdot A \cdot \Delta t$$

Halbleitergleichungen

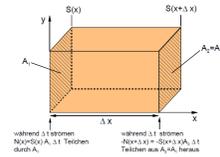


- Taylorentwicklung

$$\Delta N = \left\{ s(x) - \left[s(x) + \Delta x \frac{\partial s(x)}{\partial x} \right] \right\} \cdot A \cdot \Delta t$$

$$= -\frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A \cdot \Delta t$$

Halbleitergleichungen



- Teilchenzahländerung

$$\Delta N = -\frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A \cdot \Delta t$$

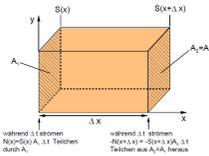
- entspricht Teilchendichteänderung

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{A \cdot \Delta x}$$

- also

$$\frac{\Delta N}{A \cdot \Delta x \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{\partial s}{\partial x}$$

Halbleitergleichungen



- Verknüpfung lokale Dichte und lokale Ströme

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{\partial s}{\partial x}$$

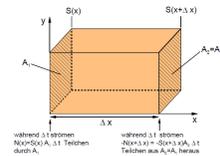
- Erweiterung auf drei Dimensionen und $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{s}$$

- Divergenz ist skalar

$$\nabla \cdot \vec{s} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

Halbleitergleichungen



- Kontinuitätsgleichung ohne Quellenterm

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{s} + g - r$$

- dazu Generationsrate g von Ladungsträgern pro Volumen
- und Rekombinationsrate r pro Volumen

Halbleitergleichungen

- ▶ Teilchenströme im Halbleiter sind Elektronenstrom

$$\vec{J}_n = -q \cdot \vec{s}_n$$

- ▶ und Löcherstrom

$$\vec{J}_p = +q \cdot \vec{s}_p$$

- ▶ damit Kontinuitätsgleichungen der Ladungsträger im Halbleiter

$$\frac{\partial n}{\partial t} \equiv \dot{n} = +\frac{1}{q} \nabla \cdot \vec{J}_n + g_n - r_n$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \equiv \dot{p} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \vec{J}_p + g_p - r_p$$

Halbleitergleichungen

- ▶ Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial n}{\partial t} \equiv \dot{n} = +\frac{1}{q} \nabla \cdot \vec{J}_n + g_n - r_n$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \equiv \dot{p} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \vec{J}_p + g_p - r_p$$

- ▶ dazu müssen die Ströme (bewegte Ladungen) mit dem elektrischen Feld verknüpft werden
- ▶ 1. Maxwell-Gleichung für Ladungsdichte ρ (Quellen) und Verschiebungsstromdichte \vec{D} (Feld)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Halbleitergleichungen

- ▶ 1. Maxwell-Gleichung (Gauß'sches Gesetz)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- ▶ Verschiebungsstromdichte

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

- ▶ elektrisches Potential

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

- ▶ el. Feld \vec{E} eingesetzt

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} = -\epsilon_0 \epsilon_r \nabla \cdot \nabla \varphi$$

Halbleitergleichungen

- ▶ Dgl. 2. Ordnung für Potential φ

$$\rho = -\epsilon_0 \epsilon_r \nabla \cdot \nabla \varphi = -\epsilon_0 \epsilon_r \Delta \varphi$$

- ▶ mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- ▶ **Poisson-Gleichung**

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

- ▶ im Halbleiter ist die Raumladung

$$\rho = q (p - n + N_D^+ - N_A^-)$$

Halbleitergleichungen

- ▶ Feld- und Diffusionsströme

$$\vec{J}_n = q\mu_n \left(n\vec{E} + \frac{kT}{q}\nabla n \right)$$

$$\vec{J}_p = q\mu_p \left(p\vec{E} - \frac{kT}{q}\nabla p \right)$$

- ▶ Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\frac{1}{q}\nabla \cdot \vec{J}_n + g_n - r_n$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q}\nabla \cdot \vec{J}_p + g_p - r_p$$

- ▶ Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{\epsilon_0\epsilon_r} (p - n + N_D^+ - N_A^-)$$

Wechselwirkung mit Licht

Wechselwirkung mit Licht

- ▶ Photonen sind Elementarteilchen der elektromagnetischen (EM) Strahlung
- ▶ Licht ist ein Ausschnitt des EM-Spektrums, Radiowellen → Röntgenstrahlung
- ▶ Photonenenergie W_{ph} proportional der Frequenz f

$$W = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

- ▶ Photonenimpuls p_{ph} proportional zur Wellenzahl k

$$|\vec{p}_{ph}| = |\hbar \cdot \vec{k}| = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c}$$

- ▶ Photonen wechselwirken mit dem Halbleiter → Optoelektronik
 - ▶ Absorption
 - ▶ Emission

Absorption von Licht im Halbleiter

- ▶ Licht breitet sich im Vakuum ungeschwächt aus
- ▶ in Materie tritt Absorption auf
- ▶ auch im Halbleiter durch Energieübertrag auf das Elektronensystem → Auslöschung des Photons
- ▶ Absorption \sim Intensität

$$dI = -\alpha \cdot I(x) dx$$

- ▶ Integration liefert Lambert-Beer'sches Gesetz

$$I(x) = I_0 \exp(-\alpha x)$$

- ▶ Intensität fällt nach Wegstrecke $1/\alpha$ um Faktor $1/e$ ab

Absorption von Licht im Halbleiter

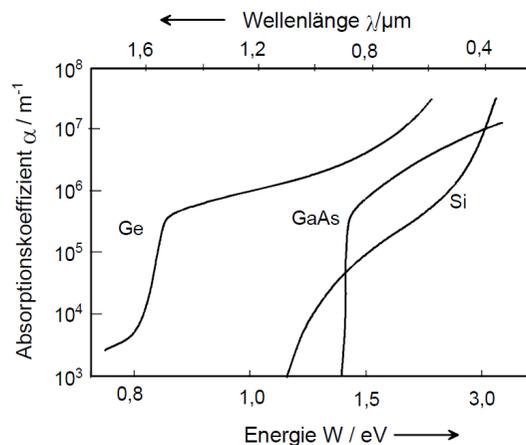
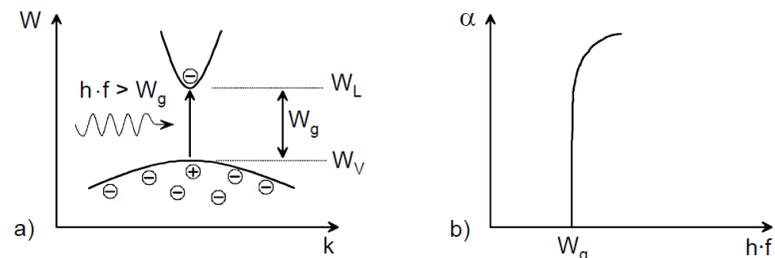


Abbildung: Absorption über Wellenlänge: grundsätzlicher Unterschied zwischen GaAs und (Si oder Ge): eine bzw. zwei Schultern

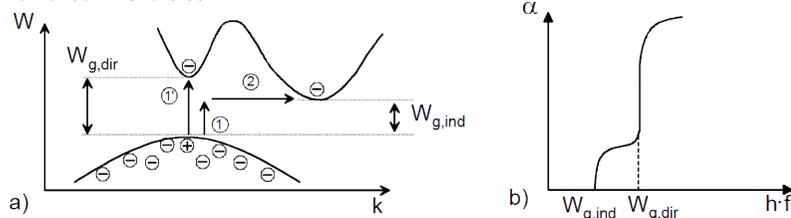
Absorption: Einfluss der Bandstruktur

- ▶ im intrinsischen Halbleiter
 - ▶ fast alle Elektronen im Valenzband
 - ▶ zur Absorption muss $W_{ph} = h \cdot f \geq W_g$ erfüllt sein
- ▶ Bandverlauf im $E(k)$ -Raum (a) und Absorption (b) für *direkten* Halbleiter (z.B. GaAs)



Absorption: Einfluss der Bandstruktur

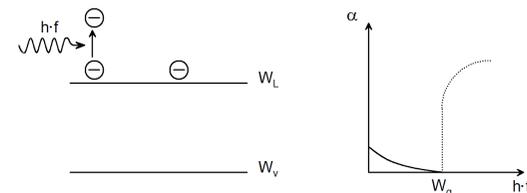
- ▶ *indirekter* Halbleiter



- ▶ effizienter direkter Übergang für $W_{phot} > W_{g,dir}$ (Impulserhaltung, $p_{phot} \sim 0$)
- ▶ indirekter Übergang schon bei $W_{phot} > W_{g,indir}$ unter Beteiligung von Phononen (p_{phon} groß, $W_{phon} \sim 0$)
- ▶ indirekter Übergang benötigt Elektron, Photon und Phonon
→ Prozess höherer Ordnung mit kleinerer Wahrscheinlichkeit
→ geringere Absorption

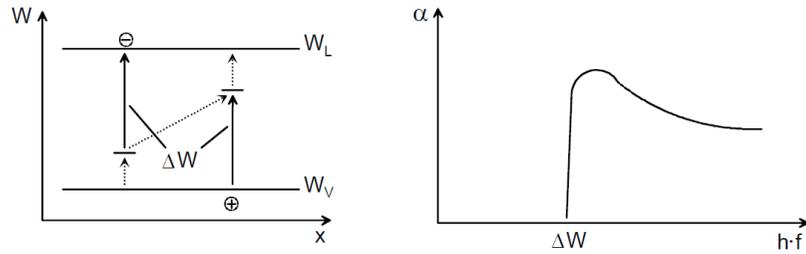
Absorption durch freie Ladungsträger

- ▶ delokalisiertes Elektron im Leitungsband kann Energie von Photon aufnehmen



- ▶ Elektron wird im Leitungsband auf höheres Niveau angeregt
- ▶ Verlauf $\alpha(h \cdot f)$ bestimmt durch Impulserhaltung
- ▶ schrittweise Relaxation zum Ausgangszustand über mehrfache Phononen-Emission (Licht → Wärme)

Absorption durch Störstellen



- ▶ tiefe Störstellen erlauben Absorption unter der Bandlücke
(links) Übergang von besetztem tiefen Akzeptoren ins Leitungsband
(rechts) Übergang von Valenzband zu ionisiertem tiefen Donator
- ▶ auch Übergänge zwischen Störstelle und benachbarter Bandkante möglich (im Infraroten)

Photoleitung

- ▶ freie Ladungsträger werden durch Absorption generiert → zusätzliche Leitfähigkeit κ_{ph}

$$\kappa_{ph} = q [\Delta n \cdot \mu_n + \Delta p \cdot \mu_p]$$

- ▶ Abweichung der Ladungsträgerkonzentration vom Gleichgewicht n_0 , p_0

$$\Delta n = n_1 - n_0$$

$$\Delta p = p_1 - p_0$$

- ▶ die Konzentrationsabweichungen Δn , Δp sind i.A. zeitabhängig und verschwinden bei Ausschalten der Beleuchtung
- ▶ Beweglichkeiten μ_n , μ_p sind konstant

Photoleitung

- ▶ Berechnung für n -Halbleiter
- ▶ Kontinuitätsgleichung für Elektronen (deren Überschusskonzentration)

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \vec{J}_n + g_n - r_n$$

- ▶ gleichmäßige Beleuchtung einer Fläche von oben → ortsunabhängiger Strom

$$\nabla \vec{J}_n = 0$$

- ▶ einfallende Photonen L pro Volumen und Zeiteinheit $[L] = \text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$ erzeugen je ein Elektron-Loch-Paar

$$g_n = L = g_p$$

Photoleitung

- ▶ **Fall a) reine Elektron-Loch-Rekombination, intrinsischer Halbleiter**

$$\Delta n \approx \Delta p$$

- ▶ Reaktionsgleichung $n + p \rightarrow 0$, Massenwirkungsgesetz mit Konstante r_n/B

$$\Delta n(t) \cdot \Delta p(t) = \frac{r_n}{B}$$

- ▶ d.h. Rekombinationsrate r_n ist proportional zu $\Delta n(t) \cdot \Delta p(t)$ weil Elektron und Loch benötigt werden

Photoleitung

- ▶ r_n eingesetzt in die Kont.gl.

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = L - B \cdot \Delta n(t) \cdot \Delta p(t)$$

- ▶ Fall a1) stationäre Beleuchtung

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$$

- ▶ daraus folgt

$$\Delta n = \sqrt{\frac{L}{B}}$$

- ▶ und für starke Beleuchtung $n_1 \gg n_0$ folgt die Ladungsträgerkonzentration n_1

$$n_1 = \sqrt{\frac{L}{B}}$$

Photoleitung

- ▶ Fall a2) Einschaltvorgang bei $t = 0$
- ▶ am Anfang wenige Ladungsträger, d.h. $\Delta n(t \sim 0) \approx 0$
- ▶ es folgt aus der Kont. gl.

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = L - B \cdot \Delta n(t) \cdot \Delta p(t) \approx L$$

- ▶ Integration gibt linearen Verlauf

$$\Delta n(t) = L \cdot t \quad \text{für } t \sim 0$$

- ▶ mit zunehmender Zeit t wird $r_n \gtrsim 0$, und n nähert sich langsamer dem stationären Wert $n_1 = \sqrt{L/B}$

Photoleitung

- ▶ Fall a3) Ausschaltvorgang bei $t = t_1$, dann ist $L = g_n = 0$, $\Delta n = \Delta n_1$ und die Kont.gl. liefert (mit $\Delta p = \Delta n$)

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = -B \cdot (\Delta n)^2$$

- ▶ Trennung der Variablen und Integration

$$\int_{\Delta n_1}^{\Delta n(t)} \frac{d(\Delta n)}{(\Delta n)^2} = -B \int_{t_1}^t dt$$

- ▶ Abklingen des Überschusses mit $1/t$ für $t \gg t_1$

Photoleitung

- ▶ Beschreibung des Abklingens des Überschusses für $t \gg t_1$

$$\Delta n = \frac{\Delta n_1}{1 + \Delta n_1 B(t - t_1)} \approx \frac{\Delta n_1}{B \cdot t}$$

- ▶ nach der Halbwertszeit τ ist $\Delta n(\tau) = 1/2$

$$\tau = \frac{1}{B \cdot \Delta n_1}$$

- ▶ bei starker Beleuchtung $\Delta n_1 \approx n_1$

$$\tau = \frac{1}{B \cdot \Delta n_1} \approx (L \cdot B)^{-1/2}$$

- ▶ die Zeitkonstante τ hängt also von der Beleuchtungsstärke L ab

Photoleitung

► Fall b) Rekombination über Störstellen

- Rekombination braucht hier keine e - h -Paare, sondern nur Elektronenüberschuss

$$r_n = C \cdot \Delta n$$

- daraus folgt Zeitkonstante $\tau_n = 1/C$

$$r_n = \frac{\Delta n}{\tau}$$

- in die Kont.gl.

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = L - \frac{\Delta n}{\tau_n}$$

Photoleitung

- Fall b1) stationäre Beleuchtung, $\partial \Delta n / \partial t = 0$

$$\Delta n = L \cdot \tau_n$$

- bei starker Beleuchtung $n_1 \gg n_0$ zählt das Verhältnis von Beleuchtungsstärke L und Zeitkonstante τ_n

$$n_1 = L \cdot \tau_n$$

- Fall b2) Einschaltvorgang bei $t = 0$, entspricht (a2)

$$\Delta n(t) = L \cdot t$$

- Fall b3) Ausschaltvorgang bei $t = t_1$, exponentieller Verlauf

$$\Delta n(t) \Delta n_1 \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau_n}}$$

Photoleitung

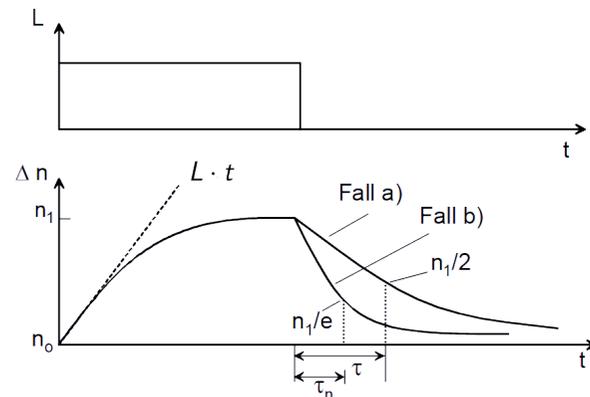


Abbildung: zeitlicher Verlauf der Überschusskonzentration. a) intrinsischer HL, b) Störstellenrekombination

Emission von Licht

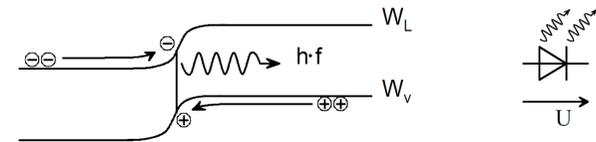
- umgekehrter Prozess der Absorption
- beim elektronischen Übergang gewonnene Energie wird als Photon abgegeben (strahlender Übergang)
- auch möglich: nichtstrahlender Übergang, Phononen, Energieübertrag an Gitterschwingungen
- für effiziente Emittoren, z.B. LED, muss nichtstrahlende Rekombination unterdrückt werden
- spontane Emission – zufälliger Prozess, Lumineszenz
- stimulierte Emission – resonanter Prozess, Laser

spontane Emission – Lumineszenz

- ▶ unkorrelierte Prozesse, mittlere Lebensdauer τ_{sp} des angeregten Zustands
- ▶ Anregung über
 1. Lichteinstrahlung höherer Energie – Photo-Lumineszenz
 2. Elektronenbeschuss – Kathodo-Lumineszenz
 3. Ladungsträgerinjektion – Elektro-Lumineszenz
 4. Erwärmung – Thermo-Lumineszenz
 5. chemische Reaktionen – Chemo-Lumineszenz
 6. mechanische Verspannung – Tribo-Lumineszenz
- ▶ Verfahren 1 und 2 zur Analyse von Halbleitern
- ▶ Verfahren 3 zur Lichterzeugung mittels pn -Übergang in LED oder Halbleiterlaser

spontane Emission – LED

- ▶ light emitting diode



- ▶ Injektion von Löchern auf p -Seite und von Elektronen auf n -Seite einer pn -Diode
- ▶ Rekombination in der Raumladungszone
- ▶ benötigt direkten Halbleiter: III/V – GaN, GaAs
- ▶ Silizium leuchtet nicht!

stimulierte Emission – LASER

- ▶ light amplification by stimulated emission of radiation
- ▶ stationäres Gleichgewicht \rightarrow Emission = Absorption z.B. in einem Gas oder Festkörper in Wechselwirkung mit dem EM-Strahlungsfeld
- ▶ einfaches System mit 2 Niveaus $W_2 > W_1$ oder $W_L > W_V$
- ▶ Resonanz bei $hf = W_2 - W_1$ bietet sehr effizienten Übertrag wg. Energieerhaltung \rightarrow überwiegt alle anderen Prozesse
- ▶ betrachte 3 fundamentale Vorgänge:
 - a) spontane Emission
 - b) stimulierte Emission
 - c) Absorption

Vorgänge im Laser

- a) spontane Emission im 2-Niveau-System
 - ▶ beschrieben mit Übergangswahrscheinlichkeit
 - ▶ nur abhängig von T und $E(k)$, nicht von der Intensität

$$P_{sp} = P_{21}^A = \frac{1}{\tau_{sp}}$$

- b) stimulierte Emission
 - ▶ abhängig von der Feldintensität $u(hf)$

$$P_{st} = u(hf) \cdot P_{21}^B = \frac{1}{\tau_{st}}$$

- c) (stimulierte) Absorption
 - ▶ abhängig von der Feldintensität $u(hf)$

$$P_{st} = u(hf) \cdot P_{12}^B$$

Vorgänge im Laser

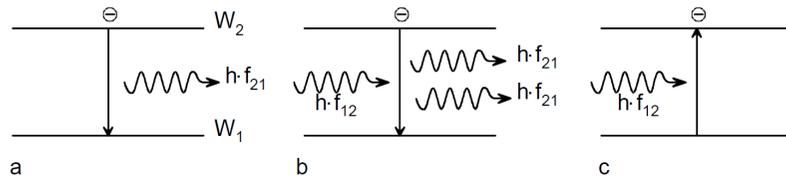


Abbildung: a) spontane Emission, b) stimulierte Emission, c) stimulierte Absorption

Vorgänge im Laser

- ▶ relative Besetzung der Niveaus mit Boltzmann $\sim \exp(W/kT)$
- ▶ stationäres Gleichgewicht, Emissionsrate = Absorptionsrate

$$e^{-W_2/kT} \cdot [P_{21}^A + u(hf) \cdot P_{21}^B] = e^{-W_1/kT} \cdot u(hf) \cdot P_{12}^B$$

- ▶ aus Planck'schem Strahlungsgesetz folgt $P_{21}^B = P_{12}^B$ (s. Kap. 2.1)
- ▶ je stärker $u(hf)$, umso mehr überwiegt die stimulierte Emission \rightarrow Lichtverstärkung
- ▶ Lichterzeugung, wenn Besetzungsinversion eingestellt wird \rightarrow Pumpen

Halbleiterlaser

- ▶ *pn*-Diode wie bei LED, Betrieb vorwärts, direkter Bandübergang
- ▶ steigende Injektion mit höherem Strom, dadurch steigende spontane Emission
- ▶ hohe Injektion erreichbar mit hohen Dotierungen $W_{Fn} > W_L$ und $W_{Fp} < W_V$ (Entartung)
- ▶ daraus folgt **Laserbedingung 1**

$$W_{Fn} - W_{Fp} > W_g$$

- ▶ dies beschreibt die Besetzungsinversion

Halbleiterlaser

$$e^{-W_2/kT} \cdot [P_{21}^A + u(hf) \cdot P_{21}^B] = e^{-W_1/kT} \cdot u(hf) \cdot P_{12}^B$$

- ▶ hohe Feldintensität erforderlich für überwiegende stimulierte Emission
- ▶ optischer Resonator (Spiegel) zur Aufrechterhaltung hoher Feldstärke
- ▶ nur ein Bruchteil der Strahlung wird (kontinuierlich) ausgekoppelt
- ▶ in einem Umlauf muss der Gewinn des Felds durch stimulierte Emission alle Verluste einschl. Auskopplung überwiegen

Halbleiterlaser

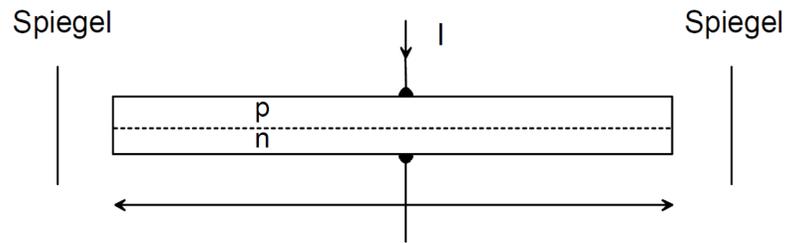


Abbildung: prinzipieller Aufbau eines Halbleiterlasers

Halbleiterlaser

- ▶ Berechnung der Lichtintensität im Resonator der Länge ℓ
- ▶ zwei Spiegel mit Reflexionsfaktor $R < 1$
- ▶ Lambert-Beer mit Absorptionsk. α (Verluste)
- ▶ Gewinn g im Resonator (stim. Emission)

$$R^2 \exp(-2\alpha\ell + 2g\ell) \geq 1$$

- ▶ Wurzel ziehen

$$R \exp(-\alpha\ell + g\ell) \geq 1$$

- ▶ der Gewinn g muss mindestens sein

$$g \geq \frac{1}{\ell} \cdot \ln \frac{1}{R} + \alpha$$

- ▶ das ist die **Laserbedingung 2**

Halbleiterlaser

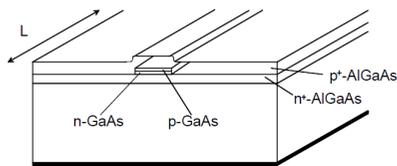


Abbildung: Streifenlaser mit vergrabener Doppel-Hetero-Struktur zur Konzentration der Ladungsträger und der optischen Mode

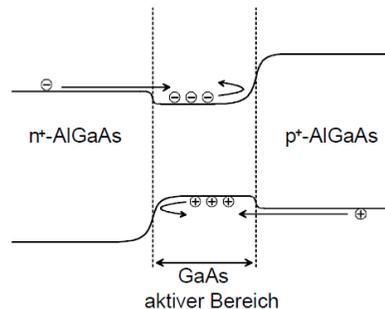


Abbildung: Bandstruktur einer Doppel-Hetero-Laserstruktur

Zusammenfassung der Vorlesung

- ▶ Ladungstransport im Festkörper
 - ▶ elektrischer Strom
 - ▶ Ladungsträgerkonzentration
 - ▶ Geschwindigkeit der Ladungsträger
 - ▶ Beweglichkeit
 - ▶ äußere Felder (**E** und **H**)
 - ▶ Generation & Rekombination
 - ▶ Halbleitergleichungen
- ▶ Wechselwirkung mit Licht
 - ▶ Absorption
 - ▶ Emission
 - ▶ Photoleitung
 - ▶ Halbleiterlaser

Danke für Ihre Teilnahme!