Festkörperelektronik

Vorlesung 9

Prof. Nils Weimann

IW / Bauelemente der Höchstfrequenzelektronik (BHE)

10.07.2025

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Lehrevaluation

Lehrevaluation

- vielen Dank für die Teilnahme an der Lehrevaluation
- 15 Antworten erhalten
- von 20 – 100 Teilnehmern der Vorlesung
- eingeschrieben sind ca. 180

Lehrevaluation

- Kritikpunkte
  - Anforderungen (Vor- und Nachbereitung, aktive Mitarbeit) werden deutlich dargestellt (2,5)
  - Prüfunganforderungen (3,0)
  - Bezug zwischen Veranstaltungsinhalten und Berufsfeld bzw. Anwendung (2,5)
  - Arbeitsaufwand deckt sich mit dem für vergleichbare Veranstaltungen (2,6)
- Zeit pro Woche durchschnittlich für die Vor- und Nachbereitung (4,2 h)
- restliche Fragen (Inhalt, Tempo, Lerneffekt, ...) (1,9)
- Hilfsmittel zur Vor- und Nachbereitung hilfreich (z.B. Skript, Folien, E-Learning-Angebote) (2,0)
- Lernen im angebotenen Online-Format lag mir besser im Vergleich zum sonst angebotenen Präsenzunterricht (2,2)

Lehrevaluation

- Ausgezeichnetes Tutorium! Aufgaben sehr kurzgehalten und sogar mit kleinem Zeitaufwand machbar!
- Vorlesung und Übung wurden im Nachhinein noch zur Verfügung gestellt, beide waren verständlich und es wurde gut auf Fragen eingegangen.
- Verständliches Erklären komplizierte Themen
- die Tonaufnahme von alle Vorlesungen war perfekt und sehr deutlich in vergleich zu anderem Vorlesungen
- Die Onlinevorlesungs- und Übungsstreams sollten bis zum Ende des Semesters auf moodle abgerufen werden können. Schade, dass sie nach einer Woche bzw. die 7. Vorlesung bereits nach zwei Tagen offline genommen wurde. So fällt eine Nachbereitung deutlich schwerer, da in der Vorlesung genauer auf das Thema eingegangen wird, als im Skript.

Lehrevaluation

- Es wäre sehr hilfreich, wenn die Skripte vor den Vorlesungen hochgeladen werden, damit man sich Notizen machen kann.
- Die Aufgezeichneten Vorlesungen könnten länger Abrufbar sein.
- auf alle Übungsvideo zugreifen können. Entweder Fristen per E-mail anmerken, wann das Video runtergenommen wird. Uneingeschränkter Zugriff auf Lehrmaterialien, damit wir nochmal einzelne Vorlesungsfolien mit dem Skript vergleichen können.
- Die Tutoriumslösungen könnten im nachhinein hochgeladen werden, oder live durcherklärt werden. Eine Probeklausur wäre auch gut, damit man sich ein Bild über die Anforderungen der eigentlichen Prüfung machen kann.

Lehrevaluation

- Wenn es ein digitales Semester ist, wieso bleiben dann nicht auch vorrangegangene Übungen oder Vorlesungsfolien einsehbar?
- nichts, alles war perfekt Vielen Dank
- Die aufgezeichneten Vorlesungen sollten bis zu Klausur online gestellt werden, um sich damit vorzubereiten zu können. Des Weiteren können mehr Informationen zur Klausur online gestellt werden (inhaltlicher Schwerpunkt, alte Klausuraufgaben, etc.)

Hiwi-Stellen im Fachgebiet BHE

- TCAD Simulation (Halbleitergleichungen)
- optische Messungen
- Höchstfrequenz-Messungen

Informationen zur Klausur FKE

- schriftliche Klausur (mit Anwesenheit in der UDE) am 30. Juli 2020, 08:30 Uhr, Räume werden noch angekündigt
- Format $\sim$ Übungsaufgaben
- Probe-Klausur wird angeboten $\rightarrow$Übungsleiter
- **Online-Fragestunde** am 23. Juli 2020, 12:00 Uhr, BBB, gleicher Link wie zur Vorlesung

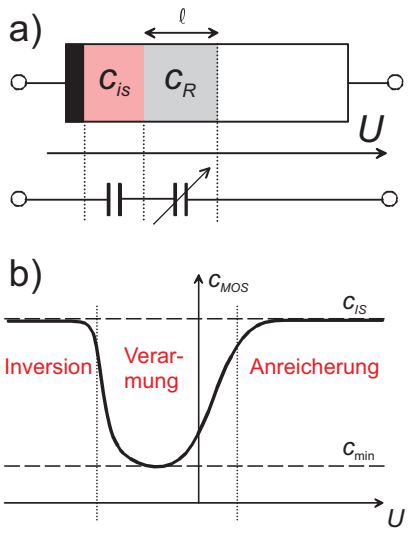
Zusammenfassung letzte Vorlesung

- Wechselwirkung mit Licht
  - Photoleitung
  - Halbleiterlaser
- Halbleiteroberfläche
  - Bändermodell
  - Debye-Länge
  - Oberflächenleitfähigkeit
- Halbleiter-Festkörper-Grenzflächen
  - Metall-Isolator-Halbleiter-System (MOS)

Ziele der heutigen Vorlesung

- Halbleiter-Festkörper-Grenzflächen
  - MOS: Frequenzabhängigkeit
  - Metall-HL-Kontakt: Schottky, Ohm
  - HL-HL-Grenzfläche: *pn*-Übergang

CV-Kennlinie der MOS-Diode



- feste Oxidkapazität c_{is}
- Serienschaltung mit Verarmungskapazität c_R

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_{IS}} + \frac{1}{c_R}$$

- maximaler Wert von c_R

$$c_{R,max} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r,HL}}{\ell}$$

- minimale MOS-Kapazität

$$\frac{1}{c_{min}} = \frac{1}{c_{IS}} + \frac{1}{c_{R,max}}$$

CV-Kennlinie der MOS-Diode

- OF-Potential φ_s entspricht Flachbandspannung U_{FB}

$$\varphi_s = U_{FB} - U \quad \text{mit} \quad U < U_{FB}$$

- eingesetzt in den Kapazitätsbelag c_R

$$c_R = \sqrt{\frac{\epsilon_0\, \epsilon_{r,HL}\, q\, N_D^+}{2(U_{FB} - U)}} \quad \text{für} \quad U < U_{FB}$$

- mit der Debye-Länge $L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon_0\, \epsilon_{r,HL}}{q\, N_D^+} \cdot \frac{kT}{q}}$

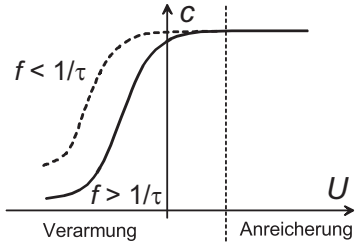
$$c_R = \frac{L_{Dn}\, q\, N_D^+}{\sqrt{2\frac{kT}{q}(U_{FB} - U)}} \quad \text{für} \quad U < U_{FB}$$

- gesamte Kapazität als Serienschaltung

$$\frac{1}{c_{MOS}} = \frac{1}{c_{IS}} + \frac{1}{c_R(U)} \quad \text{d.h.} \quad c_{MOS} \leq c_{IS}$$

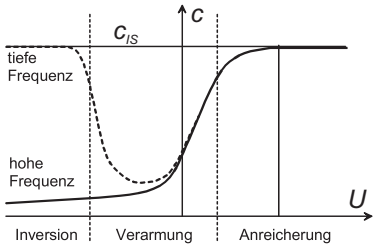
CV-Kennlinie der MOS-Diode

- Ladung im Oxid Q_{IS} und in der Grenzfläche Q_{SS} ist spannungsabhängig und kann von zeitlich veränderlicher Spannung $U(t)$ umgeladen werden
- für die Umladung ist eine Zeit τ_s nötig
- für Frequenzen $f > 1/\tau_s$ wird nur ein Teil der Zustände ge- und entladen
- daher ist c_{MOS} kleiner bei hohen Frequenzen



CV-Kennlinie der MOS-Diode

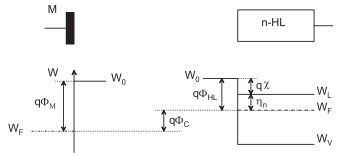
- im Inversionsbereich besteht starke Abhängigkeit von der Frequenz
- Inversion bedeutet Bereitstellung von Minoritäten an der Oxid-Halbleiter-Grenzfläche
- dies erfordert Elektron-Loch-Paarerzeugung durch thermische Generation, unwahrscheinlich bei RT
- langsamer Prozess, $\tau_{inv} = 10^{-6}$ s bis 1 s



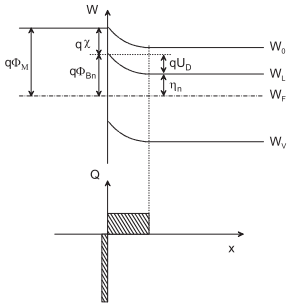
Halbleiter-Metall-Kontakte

Banddiagramm Me-HL-Kontakt

- getrennte Systeme (idealisiert, keine OF)



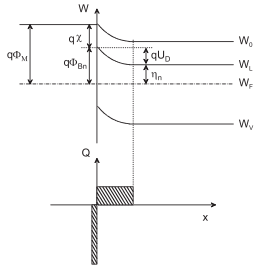
- Metall und HL in Kontakt



- Ferminiveau im Gleichgewicht konstant
- Angleichung der Vakuumniveaus
- Bandverbiegung
- Verarmung der Halbleiter-Grenzfläche
- Entstehung einer Raumladungszone
- entgegengesetzte Ladung auf dem Metall

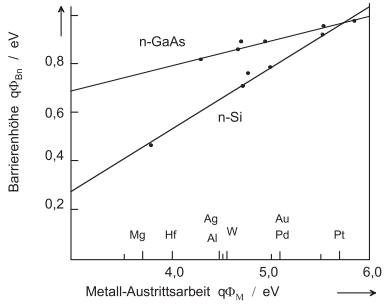
Banddiagramm Metall-HL-Kontakt

- Metall und HL in Kontakt



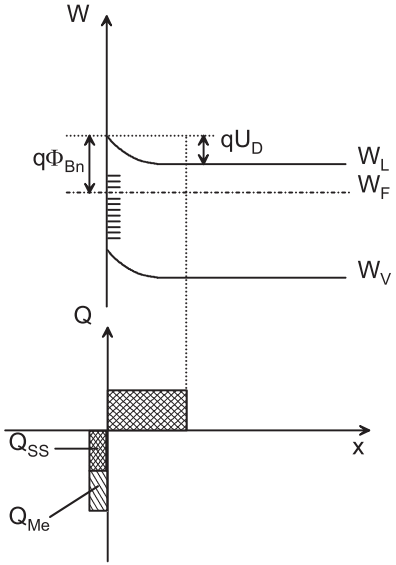
- Diffusionsspannung U_D abhängig von Dotierung mit $\eta_n = W_L - W_F$
- Barriere Metall → Halbleiter $q\,\Phi_{Bn} = q(\Phi_M - \chi)$
- Leitungsband HL → Metall $q\,U_D = q(\Phi_{Bn} - \eta_n)$
- **Gleichrichtung**
- äußere Spannung U kann Potentialbarriere kompensieren
- je nach Vorzeichen von U *Stromfluss* bzw. *Sperrverhalten*
- Gleichrichtung ist Konsequenz der **Energielücke im HL** →keine Zustände unterhalb W_L

gemessene Barrierenhöhen



- deutlich schwächere Abhängigkeit als $q\,\Phi_{Bn} = q(\Phi_M - \chi)$
- Vernachlässigung von Grenzflächenzuständen
- große Flächendichte von Grenzfl.-Zust. muss umgeladen werden
- Ladungsspeicher, entspricht Kapazität C_{ss}
- große Grenzflächenladungs-Änderung $\Delta Q_{ss} \sim C_{ss} \cdot \Delta\varphi_s$ auch bei kleiner Potentialänderung
- Festnageln des Ferminiveaus, *Fermi level pinning*

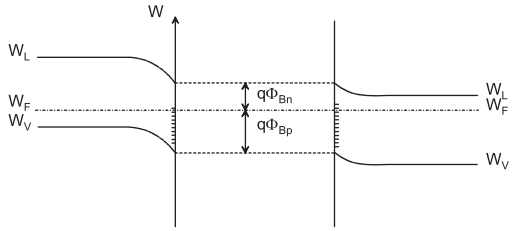
Fermi level pinning



- Ladungsverteilung mit Grenzflächen-Zuständen
- zusätzlich auf dem Metall influenzierte Ladung Q_{ss}
- Barrierenhöhe nur schwach abhängig von Φ_M, z.B. für Si

$$q\,\Phi_{Bn} = 0,27 \cdot q\,\Phi_M - 0{,}55\,\text{eV}$$

Metall auf n- und p-Halbleiter



- Grenzflächenzustände bis W_F gefüllt
- negative Ladung →zieht Löcher an
- Löcherenergie wird *nach unten* aufgetragen
- Barriere $q\,\Phi_{Bp}$ für Löcher von W_V gemessen
- Löcher müssen Barriere zum Valenzband überwinden
- es gilt für *ein* Metall $q\,\Phi_{Bn} + q\,\Phi_{Bp} = W_g$
- Metalle mit hoher Barriere auf n-Typ zeigen kleine Barriere auf p-Typ und umgekehrt

CV-Kennlinie Schottky-Kontakt

- Plattenkondensator: Metall, verarmte Raumladungszone, leitfähiger Halbleiter
- wie MOS, ohne Isolator: nur Flächenkapazität c_R wegen verarmter Raumladungszone im Halbleiter

$$c_R = \frac{dQ_R}{dU} \quad \text{mit} \quad Q_R = q\,N_D^+\,\ell$$

- Dicke der Raumladungszone ohne angelegte Spannung

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_{r,HL}}{q\,N_D^+}\,U_D} \quad \text{für} \quad 0 < U_D = U_{FB}$$

CV-Kennlinie Schottky-Kontakt

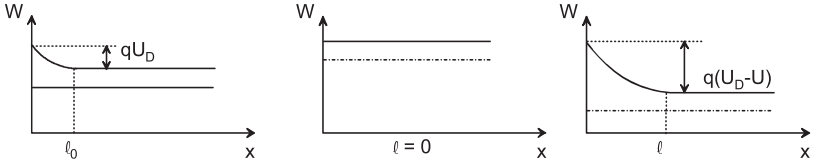
- angelegte Spannung U verändert die Dicke der RLZ

$$\ell = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_{r,HL}}{q\,N_D^+}\,(U_D - U)}$$

- für $U = U_D$ verschwindet die RLZ, $\ell = 0$
- eingesetzt in die Flächenladungsdichte Q_R und $\frac{d}{dU}$

$$c_R = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_{r,HL}q\,N_D^+}{2(U_D - U)}} \quad \text{für} \quad U_D > 0$$

- Anwendung: Varaktor

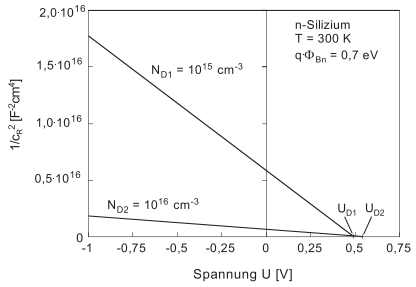


a) U = 0 b) U = U_D > 0 c) U < 0

Anwendung CV-Kennlinie: Dotierkonzentration messen

Umformung des Schottky-Kapazitätsbelags, z.B. *n*-HL

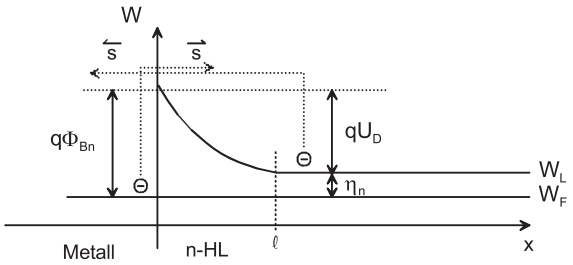
$$\frac{1}{c_R^2} = \frac{2}{q\epsilon_0\epsilon_{r,HL}N_D^+}(U_D - U) = \frac{K}{N_D^+}\cdot(U_D - U)$$



- Dotierkonzentration als Steigung K von $1/c_R^2(U)$
- x-Abschnitt gibt Diffusionsspannung U_D
- $U_{D1} \neq U_{D2}$ wegen $q\,U_D = q(\Phi_{Bn} - \eta_n)$
- Abhängigkeit der Barrierenhöhe von N_D

Schottky-Diode: IV-Kennlinie

Emission über Barriere, Elektronen mit $W_{th} = kT$



- nicht zu großes E-Feld: $v_{th} \gg v_D$
  →**thermionische Emission**
- zwei Fälle
  - MFW $\gg \ell$, Elektronen durchqueren RLZ ohne Zusammenstoß
    →**Diodentheorie** (*Bethe*, 1922)
  - MFW $\ll \ell$, viele Stöße, diffusiver Transport durch die RLZ
    →**Diffusionstheorie** (*Schottky*, 1938)

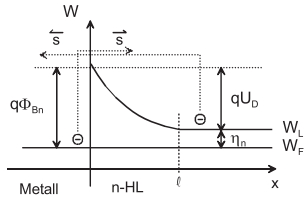
Diodentheorie

- angelegte Spannung fällt über RLZ ab (warum?)
- Teilchenströme nach rechts $s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}$ und links $s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}$
- **im Halbleiter am Metall-Kontakt** ($x = 0$) gilt für

$$s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}(0) = B \cdot v_{th}(0) \cdot n(0) \equiv v_R \cdot n(0)$$

  Proportionalitätskonstante B: Mittelung über Geschwindigkeits- und Richtungsverteilung der e^-
- mit Elektronenkonzentration $n(0) = N_L \cdot e^{-q\Phi_{Bn}/kT}$

$$s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}(0) = v_R \cdot N_L \cdot e^{-q\Phi_{Bn}/kT}$$

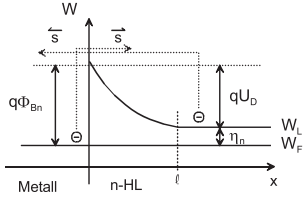


Diodentheorie

- in der anderen Richtung, am rechten Ende ($x = \ell$) der Raumladungszone **im Halbleiter**

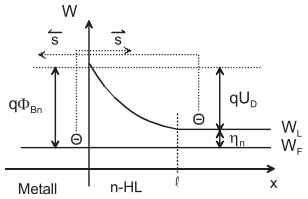
$$s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}(\ell) = -C \cdot v_{th} n(\ell) \equiv -v_L \cdot n(\ell)$$

- Vorzeichen $-$ wegen entgegengesetzter Richtung
- $B = C$, weil $v_{th} \gg v_D$ also $|v_R| = |v_L| \equiv v_{RL}$



- Anteil von $n(\ell)$ erreicht Grenzfläche
- nur e^- mit $W_{kin} > q\,U_D$
- mit Boltzmann-Verteilung
  $s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}(0) = -v_{RL} \cdot n(\ell) \cdot e^{-q(U_D-U)/kT}$

Diodentheorie



$$q\,\Phi_{Bn} = q\,U_D + \eta_n$$

$$\begin{aligned} s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}(0) &= -v_{RL} \cdot n(0) = -v_{RL} \cdot n(\ell) \cdot e^{-q(U_D-U)/kT} \\ &= -v_{RL} \cdot N_L \cdot e^{-\eta_n/kT} \cdot e^{-qU_D/kT} \cdot e^{qU/kT} \end{aligned}$$

- gerade ausgerechnet: Elektronenstrom vom Halbleiter ins Metall an der Grenzfläche $x = 0$
- Gesamtstromdichte ist Summe aus $s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}(0)$ und $s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}(0)$

Diodentheorie

- Gesamtstromdichte

$$\begin{aligned} J &= -q \cdot [s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}(0) + s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}}(0)] \\ &= q\, v_{RL} \cdot N_L \cdot e^{-q\Phi_{Bn}/kT} \cdot \left(e^{qU/kT} - 1\right) \\ &= J_0 \cdot \left(e^{qU/kT} - 1\right) \end{aligned}$$

- Vorfaktor $J_0 = q\, v_{RL} \cdot N_L \cdot e^{-q\Phi_{Bn}/kT}$ enthält mittlere Geschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche $v_{RL} \sim v_{th}$
- wegen $\frac{1}{2}mv_{th}^2 = \frac{3}{2}kT$ gilt auch $v_{RL} \sim T^{1/2}$
- Temperaturverlauf der eff. Zustandsdichte $N_L \sim T^{3/2}$ (Kap. 3)
- Umschreiben des Vorfaktors

$$J_0 = A^* \cdot T^2 e^{-q\Phi_{Bn}/kT}$$

mit effektiver Richardson-Konstante A^*

Diodentheorie

- Vorwärtsstrom = **Durchlassstrom**
- steigt mit positiver äußerer Spannung exponentiell an
- Rückwärtsstrom = **Sperrstrom**

$$J_{Sp} = -J_0 \cdot \left(1 - e^{qU/kT}\right) \quad \text{für} \quad U < 0$$

- für große negative Spannungen wird der Sättigungs-Sperrstrom erreicht

$$J_{Sp,sat} = -J_0$$

- der Sperrstrom ist immer sehr viel kleiner als der Durchlassstrom
- dadurch entsteht eine Gleichrichterwirkung

Diodencharakteristik

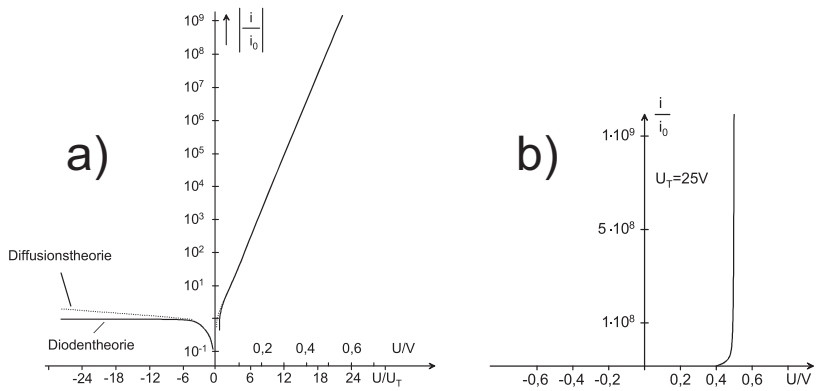
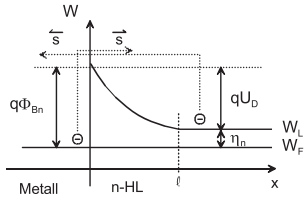


Abbildung: Strom-Spannungs-Kennlinie der Schottkydiode, logarithmische Skala (a) und lineare (b)

Diffusionstheorie

- mittlere freie Weglänge $\ll \ell$, häufige Stöße
- Konzentrationsgradient der Ladungsträger im Halbleiter aufgrund der Bandverbiegung



$$n(x) = N_L \cdot e^{-(W_L(x)-W_F)/kT} = N_L \cdot e^{-\eta_n(x)/kT}$$

- dadurch Diffusionsstrom

$$s_{\mathsf{HL}\to\mathsf{M}} = -D_n \cdot \nabla n(x) = -\mu_n \frac{kT}{q} \cdot \nabla n(x)$$

Diffusionstheorie

- wegen der Bandverbiegung ein ortsabhängiger elektrischer Potentialverlauf $\varphi(x)$

$$\nabla W_L(x) = -q \cdot \nabla\varphi(x) = q \cdot E$$

- das elektrische Feld E treibt einen Feldstrom vom Halbleiter ins Metall

$$s_{\mathsf{M}\to\mathsf{HL}}(x) = -\mu_n \cdot n(x)\nabla\varphi(x) \quad \text{mit} \quad \nabla\varphi(x) < 0$$

Diffusionstheorie

- resultierender Strom ist Summe von entgegengesetztem Diffusions- und Feldstrom, an jedem Ort x

$$J = \mu_n \cdot kT \cdot \nabla n(x) + q \cdot \mu_n \cdot n(x) \cdot \nabla\varphi(x)$$

- Lösung mit vereinfachender Annahme einer konstanten Feldstärke E_R an der Grenzfläche ($x = 0$)

$$\begin{aligned} J &= q \cdot n(0) \cdot \mu_n \cdot E_R \cdot \left(e^{qU/kT} - 1\right) \\ &= J_0 \cdot \left(e^{qU/kT} - 1\right) \end{aligned}$$

- mit Driftgeschwindigkeit der e^- am Kontakt

$$v_D = \mu_n \cdot E_R$$

- also folgt für den Sättigungsstrom

$$J_0 = q \cdot v_D \cdot n(0)$$

Vergleich von Dioden- und Diff.-theorie

- beide Theorien liefern Durchlass- und Sperrstrom, exponentiellen Verlauf der IV-Kurve
- Sättigungsstrom J_0
  - Diodentheorie $J_0 = q \cdot v_{RL} \cdot n(0)$
  - Diffusionstheorie $J_0 = q \cdot v_D \cdot n(0)$
- $v_R \sim T^{1/2}$, unabhängig von U
- v_D abhängig von der Feldstärke $E_R = (U_D - U)/\ell$, Sättigungssperrstrom steigt mit neg. Spannung an
- Durchlassstrom angenähert für hohe Spannungen

$$J = J_0 \cdot e^{qU/kT} \quad \text{für} \quad U \gtrsim 3\frac{kT}{q}$$

- lineare Näherung für kleine Spannungen

$$\frac{J}{J_0} = e^{qU/kT} - 1 \approx \left(1 + \frac{U}{U_T}\right) - 1 = \frac{U}{U_T} \quad \text{mit} \quad U_T = \frac{kT}{q}$$

Serienwiderstand

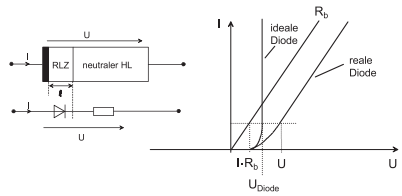
- bis jetzt Abfall der Spannung nur über RLZ angenommen
- nicht-verarmtes Halbleitergebiet und Kontakte (Ohm'scher Widerstand) führen zu Serienwiderstand R_S

$$U_{\mathsf{Diode}} = U - I \cdot R_S$$

- daraus folgt die Kennliniengleichung mit $I = J \cdot A$

$$I = I_0 \cdot \left[e^{(U - I \cdot R_S)/U_T} - 1\right]$$

- dies kann nicht nach I aufgelöst werden, graphische oder numerische Lösung bei bekanntem R_S



Ohm-Kontakte

- lineare IV-Kennlinie
- Schottky Metall-Halbleiter-Kontakt ist aber gleichrichtend und nichtlinear
- sperrfreie Kontakte können mit dem Tunneleffekt realisiert werden
- Breite der Barriere hängt von $1/\sqrt{N_D}$ ab
- mit hoher Dotierung (Entartung, $W_F > W_L$) wird die Barriere sehr schmal, einige Nanometer
- Situation entspricht der 1D-Tunnelbarriere, Kap. 2

Metall-Halbleiter-Kontakte

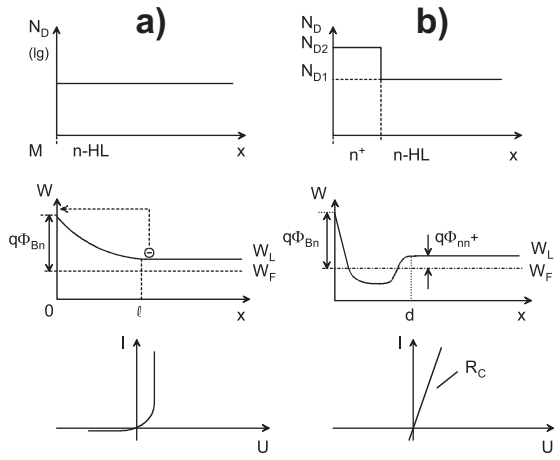
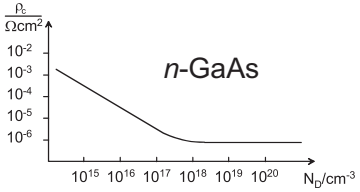


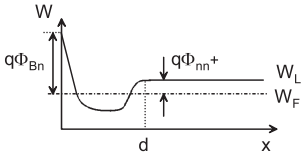
Abbildung: Bändermodell und Kennlinie für (a) Schottky- und (b) Ohm-Kontakt

Ohm-Kontakte

- Kontaktwiderstand fällt mit Dotierkonzentration



- Sättigung bei hohen Dotierkonzentrationen, weil Barriere $q\Phi_{nn+}$ verbleibt



- Kontaktwiderstände sind entscheidend für die Effizienz $P_V = R_C \cdot I^2$ und die Grenzfrequenz $1/\tau = 1/(R_C \cdot C)$

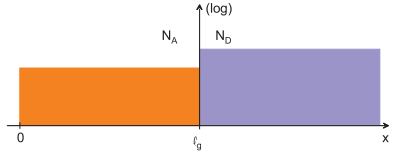
Halbleiter-Halbleiter-Grenzflächen

pn-Übergang

- fundamentales Element (fast) aller Halbleiter-Bauelement, z.B. auch im CMOS-Transistor zu finden
- Ladungsträgertransport angetrieben durch
  - elektrisches Feld →Feldstrom
  - Konzentrationsgradienten →Diffusionsstrom
- Beschreibung mittels Verbiegung der Bänder
- Ortsabhängigkeit von
  - Bandverlauf
  - Ladungsträgerkonzentration
  - Dotierstoffkonzentration

pn-Übergang: Annahmen

1. **abruptes Dotierstoffprofil** auf *p*- und *n*-Seite



- Akzeptorkonzentration

$$N_A(x) = \begin{cases} N_A = \text{const.} & x < \ell_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Donatorkonzentration

$$N_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ N_D = \text{const.} & x > \ell_g \end{cases}$$

pn-Übergang: Annahmen

2. alle Dotieratome sind ionisiert

$$N_A^- = N_A$$
$$N_D^+ = N_D$$

3. keine Grenzflächenzustände und andere Störstellen
4. thermodynamisches Gleichgewicht weit weg vom *pn*-Übergang (Index 0)

$$p_{p,0} = N_A^- = N_A$$
$$n_{n,0} = N_D^+ = N_D$$

Ladungsneutralität im Gleichgewicht

pn-Übergang: Minoritäten

- im Gleichgewicht gilt Massenwirkungsgesetz $n \cdot p = n_i^2$

$$n_{p,0} = \frac{n_i^2}{p_{p,0}} = \frac{n_i^2}{N_A} \qquad \text{Elektronen im } p\text{-Gebiet}$$
$$p_{n,0} = \frac{n_i^2}{n_{n,0}} = \frac{n_i^2}{N_D} \qquad \text{Löcher im } n\text{-Gebiet}$$

- intrinsische Konzentration Silizium $\sim 10^{10}\,\text{cm}^{-3}$
- Minoritätenkonzentrationen $\sim 10^1\,\text{cm}^{-3}$ bis $10^6\,\text{cm}^{-3}$ für Dotierkonzentrationen $\sim 10^{14}\,\text{cm}^{-3}$ bis $10^{19}\,\text{cm}^{-3}$
- Verlauf der Minoritäten bestimmt Bauelementverhalten!

pn-Übergang: Grenzfläche

- riesiger Konzentrationsunterschied treibt Löcher ins *n*-Gebiet und Elektronen ins *p*-Gebiet
- zurückbleibende ionisierte Dotieratome bilden je eine Raumladungszone im *p*- und *n*-Gebiet
- elektrische Raumladung führt zu elektrischem Feld und Potential, Poisson-Gleichung
- daraus folgt eine Verbiegung der Bänder
- elektrisches Feld wirkt der Diffusion entgegen
- ohne äußere Spannung kein Netto-Stromfluss

pn-Übergang

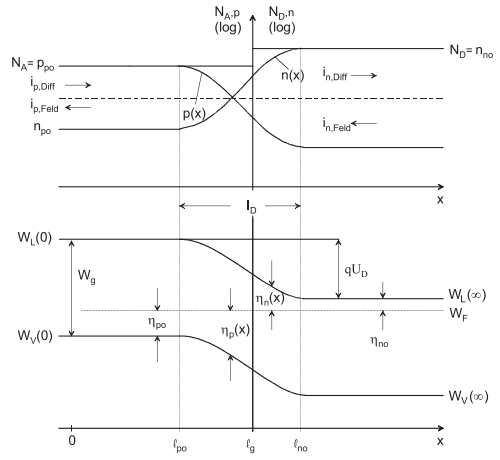
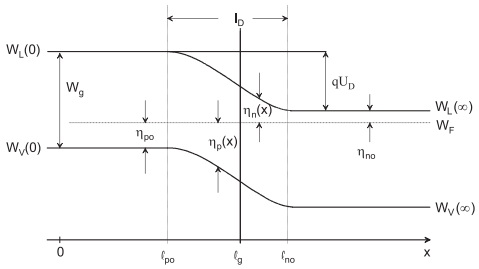


Abbildung: (a) Dotierstoff- und Ladungsträgerkonzentrationen, (b) Bändermodell abrupter *pn*-Übergang

pn-Übergang: Grenzfläche



- Angleichung des Fermi-Niveaus W_F auf beiden Seiten
- Potentialunterschied zwischen *p*- und *n*-Seite bei $x = 0$

$$q\,U_D = W_L(0) - W_L(\infty)$$

- Abstände η der Bandkanten vom Ferminiveau: Konzentration der **Majoritäten**

$$W_g - \eta_{p,0} = q\,U_D + \eta_{n,0} \quad \text{bzw.} \quad q\,U_D = W_g - \eta_{p,0} - \eta_{n,0}$$

pn-Übergang: Grenzfläche

- Majoritätenkonzentrationen mit Boltzmann-Verteilung

$$n_{n,0} = N_L \cdot e^{-\eta_{n,0}/kT}$$
$$p_{p,0} = N_V \cdot e^{-\eta_{p,0}/kT}$$

- Eigenleitungskonzentration

$$n_i^2 = N_L\,N_V\,e^{-W_g/kT}$$

- Ladungsneutralität im Gleichgewicht

$$n_{n,0} = N_D \quad \text{und} \quad p_{p,0} = N_A$$

- eingesetzt in $q\,U_D = W_g - \eta_{p,0} - \eta_{n,0}$ und umgeformt

$$q\,U_D = kT\left[\ln\frac{N_L\,N_V}{n_i^2} - \ln\frac{N_V}{N_A} - \ln\frac{N_L}{N_D}\right] = kT\,\ln\frac{N_A\,N_D}{n_i^2}$$

- Barriere $q\,U_D$ für Elektronen und Löcher am pn-Übergang

pn-Übergang: Grenzfläche

- Barriere $q\,U_D$ für Elektronen und Löcher am pn-Übergang

$$q\,U_D = kT\,\ln\frac{N_A\,N_D}{n_i^2}$$

- mit thermischer Spannung $U_{th} = kT/q$

$$U_D = U_{th}\ln\frac{N_A\,N_D}{n_i^2}$$

- Diffusionsspannung U_D muss von außen angelegt werden, um Stromfluss zu ermöglichen
- Erzeugung des **Flachbandfalls**

pn-Übergang: Diffusionsspannung

- Abhängigkeiten der Diffusionsspannung

$$U_D = U_{th}\ln\frac{N_A\,N_D}{n_i^2}$$

- Dotierkonzentrationen N_A, N_D fest vorgegeben
- intrinsische Konzentration

$$n_i^2 = N_L\,N_V\,e^{-W_g/kT}$$

- alles in der $\ln$-Funktion, nur schwach veränderlich
- Bsp.: $N_D = N_A = 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$ in Silizium gibt $U_D = 0{,}8\,\mathrm{V}$
- ab dieser Vorwärtsspannung fließt ein größerer Strom über die *pn*-Diode

pn-Übergang: *IV*-Kennlinie

- Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi = -\nabla\cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

- mit Ladungsdichte

$$\rho = q\left[N_D^+ + p(x) - N_A^- - n(x)\right]$$

- Vereinfachung: ortsfeste N_D^+, N_A^- überwiegen in der RLZ, dort p, n in der Ladungsdichte vernachlässigen
- aber: Gradienten von p und n sind groß, diese müssen in den Diffusionsgleichungen berücksichtigt werden!
- 1. Schritt: Poisson ohne p, n →Bandverlauf
- 2. Schritt: Bandverlauf →Konzentrationen

$$n(x) = N_L\cdot e^{-(W_L-W_F)/kT} = N_L\cdot e^{-\eta_n/kT}$$
$$p(x) = N_V\cdot e^{-(W_F-W_V)/kT} = N_V\cdot e^{-\eta_p/kT}$$

pn-Übergang

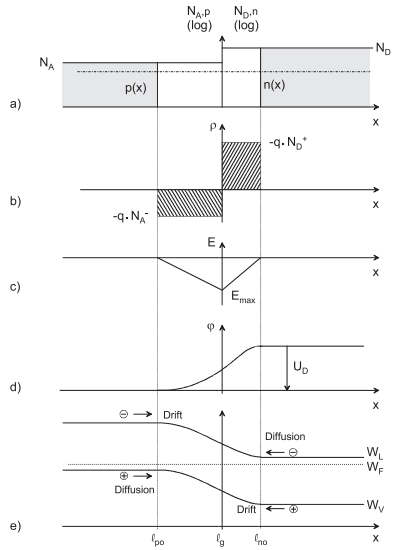


Abb.6.25 Abrupter pn-Übergang im stromlosen Zustand:

a) Konzentration Ladungsträger und Dotierung
b) Raumladung
c) Feldverlauf
d) Potentialverlauf
e) Bandverlauf

1. Poisson-Gleichung lösen

- getrennt für *p*- und *n*-Seite, dann Lösungen bei $x = \ell_g$ anpassen. Hier *p*-Seite mit $\rho = -q\,N_A^-$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon_r} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{q}\frac{d^2W_L}{dx^2} = \frac{q\,N_A^-}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

- erste Integration

$$\frac{dW_L^p}{dx} = -\frac{q^2\,N_A}{\epsilon_0\epsilon_r}\cdot x + \text{const}$$

- Randbedingung $\left.\frac{dW_L^p}{dx}\right|_{x=\ell_{p,0}} = 0$ gibt Konstante

$$\frac{dW_L^p}{dx} = -\frac{q^2\,N_A}{\epsilon_0\epsilon_r}\cdot(x-\ell_{p,0})$$

1. Poisson-Gleichung lösen

- zweite Integration

$$W_L^p(x) = -\frac{q^2\,N_A}{\epsilon_0\epsilon_r}\int(x-\ell_{p,0})\,dx$$

- Randbedingung $W_L^p(0) = W_L^p(\ell_{p,0})$

$$W_L^p(x) = W_L^p(0) - \frac{q^2\,N_A}{2\epsilon_0\epsilon_r}(x-\ell_{p,0})^2$$

- analog auf n-Seite

$$W_L^n(x) = W_L^n(\infty) + \frac{q^2\,N_D}{2\epsilon_0\epsilon_r}(\ell_{n,0}-x)^2$$

1. Poisson-Gleichung lösen

- Lösungen zusammensetzen bei $x = \ell_g$
- **stetige Differenzierbarkeit**

$$\frac{dW_L^p}{dx}(\ell_g) = \frac{dW_L^n}{dx}(\ell_g)$$

- daraus folgt mit dem Resultat der 1. Integration die **Ladungsneutralität**

$$q\,N_A(\ell_g-\ell_{p,0}) = q\,N_D(\ell_{n,0}-\ell_g)$$

1. Poisson-Gleichung lösen

- Lösungen zusammensetzen bei $x = \ell_g$
- **Stetigkeit**

$$W_L^p(\ell_g) = W_L^n(\ell_g)$$

- daraus folgt mit dem Resultat der 2. Integration die **Diffusionsspannung**

$$\begin{aligned} q\,U_D &= W_L(0) - W_L(\infty) \\ &= \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon_r}\left[N_A\,(\ell_g-\ell_{p,0})^2 + N_D\,(\ell_{n,0}-\ell_g)^2\right] \end{aligned}$$

1. Poisson-Gleichung lösen

- Kombination der Gleichungen für Ladungsneutralität und Diffusionsspannung gibt Breite der RLZ *p*- und *n*-seitig

$$\ell_g - \ell_{p,0} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r N_D}{q\, N_A(N_A+N_D)}} \cdot \sqrt{U_D}$$

$$\ell_{n,0} - \ell_g = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r N_A}{q\, N_D(N_A+N_D)}} \cdot \sqrt{U_D}$$

- Summe der Ausdrücke gibt gesamte Breite der *pn*-RLZ

$$\ell_0 = \ell_{n,0} - \ell_{p,0} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r}{q}\left(\frac{1}{N_A}+\frac{1}{N_D}\right)} \cdot \sqrt{U_D}$$

2. Konzentrationen aus Bandverlauf

- für die Majoritäten auf *n*-Seite

$$n(x) = N_L \cdot e^{-(W_L(x)-W_F)/kT} = N_L \cdot e^{-\eta_n(x)/kT}$$
$$= N_L \cdot e^{-(W_L(\infty)-W_F)/kT} \cdot e^{-\frac{q^2 N_D(\ell_{n,0}-x)^2}{2\epsilon_0\epsilon_r}}$$

- mit Debye-Länge

$$L_{Dn} = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{q^2 N_D}}$$

- und Gleichgewicht weit weg vom Übergang

$$n_{n,0} = N_D = N_L \cdot e^{-(W_L(\infty)-W_F)/kT}$$

- folgt Verlauf der Majoritätenkonzentration auf *n*-Seite

$$n_n(x) = N_D \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dp}}\right)^2}$$

2. Konzentrationen aus Bandverlauf

- Majoritätenkonzentration auf *n*-Seite

$$n_n(x) = N_D \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dn}}\right)^2}$$

- analog Majoritätenkonzentration auf *p*-Seite

$$p_p(x) = N_A \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\ell_{p,0}}{L_{Dp}}\right)^2}$$

- das MWG gilt jeweils auf den beiden Seiten

$$n_n \cdot p_n = n_i^2 \quad \text{und} \quad n_p \cdot p_p = n_i^2$$

- daraus folgt für die Minoritätenkonzentrationen

$$n_p(x) = \frac{n_i^2}{p_p(x)} = \frac{n_i^2}{N_A} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\ell_{p,0}}{L_{Dp}}\right)^2}$$
$$p_n(x) = \frac{n_i^2}{n_n(x)} = \frac{n_i^2}{N_D} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dn}}\right)^2}$$

2. Konzentrationen aus Bandverlauf

- Minoritätenkonzentrationen

$$n_p(x) = \frac{n_i^2}{N_A} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\ell_{p,0}}{L_{Dp}}\right)^2}$$
$$p_n(x) = \frac{n_i^2}{N_D} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dn}}\right)^2}$$

- Diffusionsspannung verwenden

$$U_D = U_{th} \ln \frac{N_A\, N_D}{n_i^2}$$

- um intrinsische Konzentration loszuwerden

$$n_p(x) = N_D \cdot e^{-\frac{U_D}{U_{th}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\ell_{p,0}}{L_{Dp}}\right)^2}$$
$$p_n(x) = N_A \cdot e^{-\frac{U_D}{U_{th}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dn}}\right)^2}$$

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- äußere Spannung U: ersetze U_D mit $U_D - U$
- $U > 0$ baut die Barriere ab, Stromfluss, RLZ schrumpft
- $U < 0$ erhöht die Barriere, Sperrverhalten, RLZ breiter

$$\ell_g - \ell_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r N_D}{q\, N_A(N_A+N_D)}} \cdot \sqrt{U_D - U}$$

$$\ell_n - \ell_g = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r N_A}{q\, N_D(N_A+N_D)}} \cdot \sqrt{U_D - U}$$

$$\ell = \ell_n - \ell_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r}{q}\left(\frac{1}{N_A}+\frac{1}{N_D}\right)} \cdot \sqrt{U_D - U}$$

- Verschiebung der Grenzen der RLZ

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- die Minoritäten fallen mit der vorherigen Steigung ab

$$n_p(x) = N_D \cdot e^{-\frac{U_D-U}{U_{th}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\ell_{p,0}}{L_{Dp}}\right)^2}$$

$$p_n(x) = N_A \cdot e^{-\frac{U_D-U}{U_{th}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_{n,0}-x}{L_{Dn}}\right)^2}$$

- Gleichgewicht wird tiefer in den Bahngebieten erreicht
- Minoritäten-Konzentration ist erhöht/erniedrigt um Faktor $e^{U/U_{th}}$
- graphische Darstellung ...

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

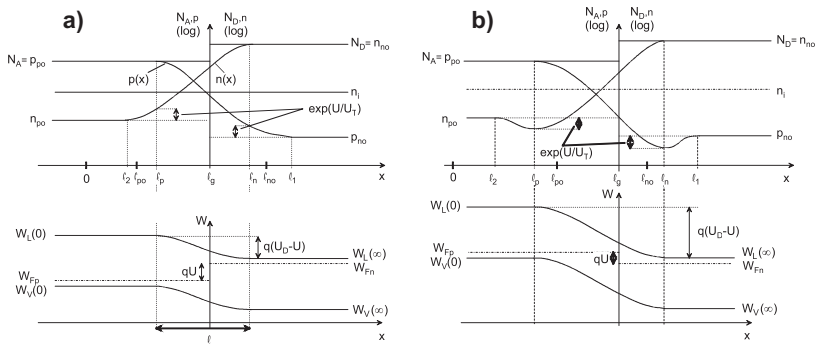


Abbildung: (a) $U > 0$ Vorwärtsbetrieb und (b) $U < 0$ Sperrbetrieb

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Diffusionsgleichung, Löcherstrom auf *n*-Seite

$$J_p n(x) = -q\mu_p U_{th} \frac{dp_n(x)}{dx}$$

- Kontinuitätsgleichung, keine Generation, nur Rekombination

$$\frac{dp_n(x)}{dt} = -\frac{1}{q}\frac{dJ_{pn}}{dx} - r_p$$

- stationärer Fall $\frac{dp_n(x)}{dt} = 0$ und Rekombinationsrate proportional der Abweichung vom Gleichgewicht $r_p = \frac{p_n(x)-p_{n,0}}{\tau_p}$

$$\frac{dJ_{pn}}{dx} = -q\frac{p_n(x)-p_{n,0}}{\tau_p}$$

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Diffusionsgleichung differenzieren und in Kontinuitätsgleichung einsetzen
$$\frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{L_p^2}\left[p_n(x) - p_{n,0}\right]$$
mit Diffusionslänge $L_p^2 = \tau_p \mu_p U_{th} \neq L_{Dp}$ (Debye-Länge)
- Ansatz für die Lösung
$$p_n(x) - p_{n,0} = A \cdot e^{x/L_p} + B \cdot e^{-x/L_p}$$
- Randbedingung 1 ist verschobene Konzentration an der Grenze der RLZ bei $x = \ell_n$
$$p_n(\ell_n) = p_{n,0} \cdot e^{U/U_{th}}$$
- Randbedingung 2 ist Gleichgewicht bei $x = \ell_1$
$$p_n(\ell_1) = p_{n,0}$$

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Lösung für Löcher-Minoritäten auf *n*-Seite
$$p_n(x) - p_{n,0} = p_{n,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\ell_1 - x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right)}$$
- differenzieren, einsetzen in Diffusionsgleichung
$$J_{pn}(x) = \frac{q\mu_p U_{th}}{L_p} \cdot p_{n,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\ell_1 - x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right)}$$
- analog Strom für Elektronen-Minoritäten auf *p*-Seite
$$J_{np}(x) = \frac{q\mu_n U_{th}}{L_n} \cdot n_{p,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \frac{\cosh\left(\frac{x - \ell_2}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{\ell_p - \ell_2}{L_n}\right)}$$

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Shockley-Näherung: keine Rekombination in der RLZ, d.h. $\{L_n, L_p\} \gg \ell_n - \ell_p$
- mit Kont.gl. dadurch konstante Gradienten in der RLZ
- Diffusionsströme daher konstant in der RLZ
$$J_{pn}(\ell_n) \approx J_{pn}(\ell_g)$$
$$J_{np}(\ell_p) \approx J_{np}(\ell_g)$$
- ermöglicht Auswertung der Stromdichten bei ℓ_n und ℓ_p
- und ihre Addition zur Gesamtstromdichte an der Grenzfläche bei ℓ_g

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Stromdichten an den Enden der RLZ $\{\ell_n, \ell_p\}$
$$\begin{aligned} J_{pn}(\ell_n) &= \frac{q\mu_p U_{th}}{L_p} \cdot p_{n,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right)} \\ &= \frac{q\mu_p U_{th}}{L_p} \cdot p_{n,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \coth\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right) \\ J_{np}(\ell_p) &= \frac{q\mu_n U_{th}}{L_n} \cdot n_{p,0} \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right] \cdot \coth\left(\frac{\ell_p - \ell_2}{L_n}\right) \end{aligned}$$
- Gesamtstromdichte durch Addition, $J = J_0 \cdot \left[e^{U/U_{th}} - 1\right]$
$$J_0 = q\,U_{th}\left[\frac{\mu_p}{L_p} p_{n,0} \coth\left(\frac{\ell_1 - \ell_n}{L_p}\right) + \frac{\mu_n}{L_n} n_{p,0} \coth\left(\frac{\ell_p - \ell_2}{L_n}\right)\right]$$

IV-Kennlinie des *pn*-Übergangs

- Sättigungsstromdichte

$$J_0 = q\,U_{th}\left[\frac{\mu_p}{L_p}p_{n,0}\coth\left(\frac{\ell_1-\ell_n}{L_p}\right)+\frac{\mu_n}{L_n}n_{p,0}\coth\left(\frac{\ell_p-\ell_2}{L_n}\right)\right]$$

- Einsetzen der Gleichgewichtskonzentrationen $n_{p,0} = n_i^2/N_A$ und $p_{n,0} = n_i^2/N_D$ gibt Bezug zu Dotierkonzentrationen N_A und N_D

$$J_0 = q\,U_{th}n_i^2\left[\frac{\mu_p}{L_pN_D}\coth\left(\frac{\ell_1-\ell_n}{L_p}\right)+\frac{\mu_n}{L_nN_A}\coth\left(\frac{\ell_p-\ell_2}{L_n}\right)\right]$$

- und Diodenkennlinie (ohne Rekombination in der RLZ)

$$J = J_0\cdot\left[e^{U/U_{th}}-1\right]$$

Zusammenfassung der Vorlesung

- Halbleiter-Festkörper-Grenzflächen
  - MOS: Frequenzabhängigkeit
  - Metall-HL-Kontakt: Schottky, Ohm
  - HL-HL-Grenzfläche: *pn*-Übergang

Danke für Ihre Teilnahme!